İNTEGRAL

BELİRSİZ İNTEGRAL

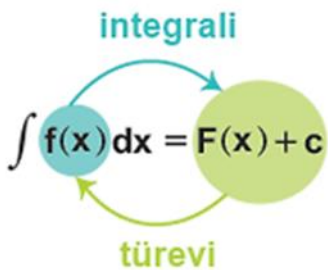
$F(x)$ fonksiyonun türevi $f(x)$ olsun. $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun **ters türevi** veya **belirsiz integrali** denir.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali $\int f(x)\mathrm{dx}$ biçiminde ifade edilir.

Bu $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali $F(x) + c$ olarak elde edilir.

Burada c sabit sayısına **integral sabiti** denir.

Bu durumda $\int f(x)\mathrm{dx} = F(x) + c$ olur.



SONUÇ:

$$\int f(x)\mathrm{dx} = F(x) + c \Rightarrow \frac{d}{\mathrm{dx}}\int f(x)\mathrm{dx} = \frac{d}{\mathrm{dx}}(F(x) + c) = F^{'}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{\mathrm{dx}}\int f(x)\mathrm{dx} = f(x) \text{ olur.}$$

SORU

$\int x.f(x)\,dx = x^4 - 8x^2$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

SORU

$\int \frac{f(x)}{x}\,dx = x^2 - 3x + c$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum değerini bulunuz.

İNTEGRAL ALMA KURALLARI

$n \neq -1$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \Rightarrow F'(x) = x^n$ olduğundan $\int x^n \mathrm{dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ olur.

NOT: İntegral alma işlemi farklı değişkenlere göre de uygulanabilir.

DİFERANSİYEL KAVRAMI

Türevlenebilir bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi $\frac{d}{\mathrm{dx}}(f(x)) = f'(x)$ olmak üzere $d(f(x))$ ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun **diferansiyeli** denir.

$d(f(x)) = f'(x) \cdot \mathrm{dx}$ olur.

SORU

$f(x) = \sqrt{x^3 - x}$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyelini bulunuz.

SORU

- $h(x) = \int f(x)\,\mathrm{dx} + \int x\,.f^{'}(x)\,\mathrm{dx}$
- $h(1) = f(1)$
- $f(2) = 3$

olduğuna göre h(2) değerini bulunuz.

SORU

$$\int \left(x\,\sqrt[3]{x} \;-\frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

ifadesinin değerini bulunuz.

SORU

$\int x^2(x-3)\,(x^2+3x+9)\,dx$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**

DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMİ

İntegral alma kuralları ile alınması zor olan bazı integraller değişken değiştirme yöntemi kullanılarak daha basit integraller hâline getirildikten sonra kolayca integrali alınabilir.

$n \neq 0, n \neq -1$ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$\int f(x)^n \cdot f'(x) \cdot \mathrm{dx}$

biçimindeki integrallerde sırasıyla aşağıdaki adımlar uygulanır:

$f(x) = u$ dönüşümü yapılır. Sonra her iki tarafın diferansiyeli alınır.

$f'(x) \cdot \mathrm{dx} = \mathrm{du}$ olur.

Buradan dönüşüm ve diferansiyel verilen integralde yerine yazılarak

$\int f(x)^n \cdot f'(x) \cdot \mathrm{dx} = \int u^n \cdot \mathrm{du}$ elde edilir.

Yeni elde edilen u değişkenine bağlı integral alınır. Bulunan ifadede u yerine eşiti olan $f(x)$ yazılarak integral alma işlemi tamamlanır.

SORU

$\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+2}$ dx **ifadesinin eşitini bulunuz.**

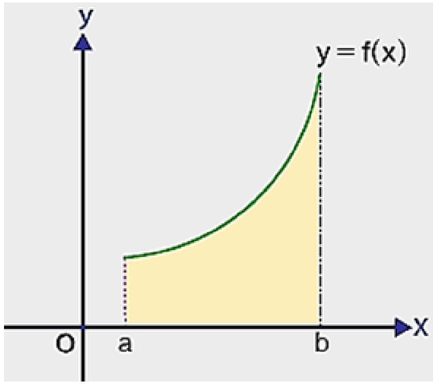
SORU

$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3}}\ \boldsymbol{dx}$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**

RİEMANN TOPLAMI

BİR FONKSİYONUN GRAFİĞİ İLE x EKSENİ ARASINDA KALAN SINIRLI BÖLGENİN ALANININ RİEMANN TOPLAMI YARDIMIYLA YAKLAŞIK OLARAK HESAPLANMASI

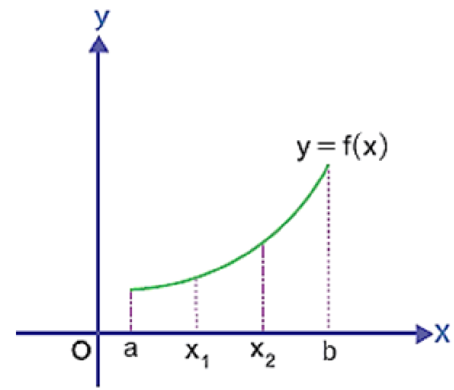
Aşağıda $[a,b]$ nda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$[a,b]$ nda $y = f(x)$ eğrisi ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı Alman matematikçi Bernhard Riemann (Bernard Riman) tarafından hesaplanmıştır.

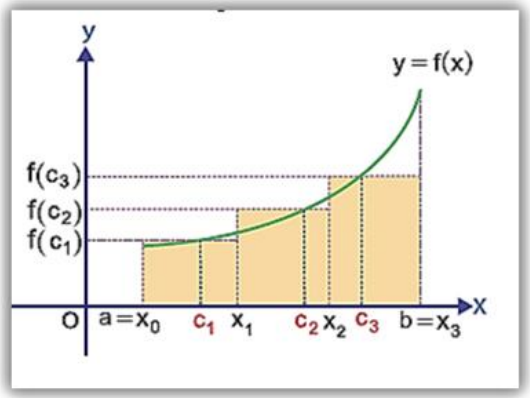
$[a,b]$ nda $a < x_1 < x_2 < b$ olmak üzere $a = x_0$ ve $b = x_3$ seçilerek oluşturulan $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ kümesine $[a,b]$ nın bir **bölüntüsü** denir. (Bu bölüntü eşit aralıklarla olmak zorunda değildir.)

Eğer $[a,b]$, n tane eşit alt aralığa bölünecek olursa ortak genişlik $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ olur.



Grafikte oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren $\Delta x_1 \cdot f(c_1) + \Delta x_2 \cdot f(c_2) + \Delta x_3 \cdot f(c_3)$ toplamına $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ na ait bir **Riemann toplamı** denir.

Burada $[a,b]$, 3 alt aralığa ayrılmıştır.



RİEMANN ÜST TOPLAMI

Grafikteki eğrinin üzerinde oluşan boyalı dikdörtgenlerin

toplam alanını veren

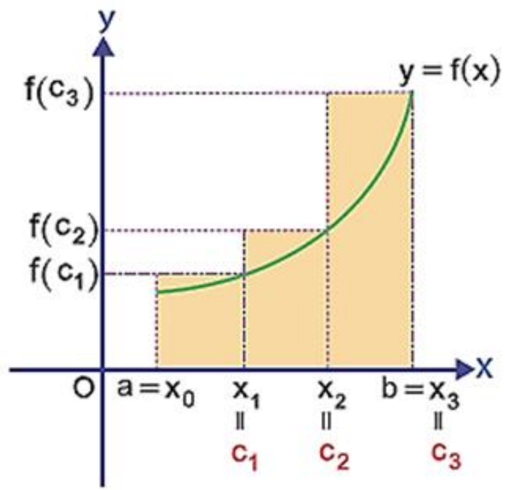
$\Delta x_1 \cdot f(c_1) + \Delta x_2 \cdot f(c_2) + \Delta x_3 \cdot f(c_3)$

toplamına $f(x)$ fonksiyonunun $[\mathrm{a,b}]$ na ait bir **Riemann üst toplamı** denir.

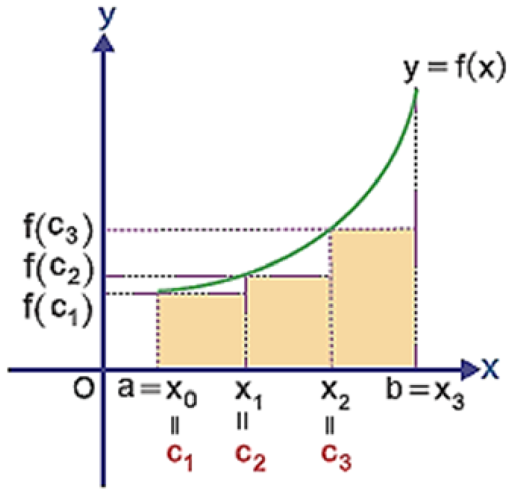
Eğer $[\mathrm{a,b}]$ daha fazla alt aralığa ayrılırsa bulunan

Riemann üst toplamının değeri, eğrinin altında

kalan alanın değerine daha yakın olur.



RİEMANN ALT TOPLAMI



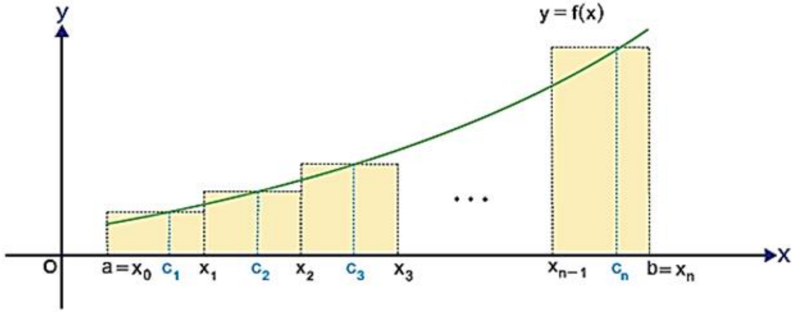
Grafikteki eğrinin altında oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren

$\Delta x_1 \cdot f(c_1) + \Delta x_2 \cdot f(c_2) + \Delta x_3 \cdot f(c_3)$

toplamına $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ na ait bir **Riemann alt toplamı** denir.

Eğer $[a,b]$ daha fazla alt aralığa ayrılırsa bulunan Riemann alt toplamının değeri, eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

SONUÇ



$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ olmak üzere [a,b] nda hesaplanan Riemann toplamı A ise

$y = f(x)$ eğrisinin altında kalan alan yaklaşık olarak

$$A = \Delta x \cdot f(c_1) + \Delta x \cdot f(c_2) + \Delta x \cdot f(c_3) + \ldots + \Delta x \cdot f(c_n) = \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f(c_k)$$

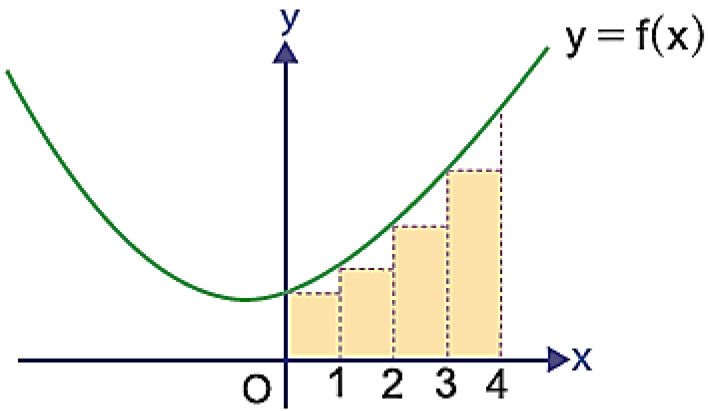
olarak ifade edilir. Buna göre Riemann toplamı n nin sonsuza yaklaşması durumunda $y = f(x)$ ile x ekseni arasında kalan alanı vereceğinden bu alan

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f(c_k)$ limiti ile hesaplanır.

Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f(c_k)$ değerine f fonksiyonunun [a,b] ndaki **belirli integrali** denir.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f(c_k) = \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{dx}$ olur.

SORU



Yukarıda $f(x) = x^2 + 2x + 2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $[0, 4]$ aralığı 4 eşit alt aralığa bölünerek hesaplanan

Riemann alt toplamı kaçtır?

SORU

$f:[1,3) \rightarrow [1,27]$ olmak üzere $f(x) = x^3$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralığı iki eşit parçaya bölen düzgün bir P parçalanması yapılıyor.

Buna göre Riemann alt toplamının Riemann üst toplamına oranı kaçtır?

BİR FONKSİYONUN BELİRLİ İNTEGRALİ İLE BELİRSİZ İNTEGRALİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ nda sürekli ve $F'(x) = f(x)$ olmak üzere

$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = F(b) - F(a)$ olur.

BELİRLİ İNTEGRALİN ÖZELLİKLERİ

$f(x)$ fonksiyonun integrali $F(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonunun integrali $G(x)$ olsun.

$[a,b]$ nda integrallenebilir f ve g fonksiyonları için belirli integralin özellikleri vardır.

1) Belirli integralde alt ve üst sınırlar eşit ise belirli integralin değeri sıfırdır.

$$\int_a^a f(x)\mathrm{dx} = 0$$

2) Belirli integralde alt ve üst sınırlar yer değiştirirse belirli integral işaret değiştirir.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = -\int_b^a f(x)\mathrm{dx}$$

3) $a < c < b$ ise $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ integrali aşağıdaki gibi iki integralin toplamı olarak ifade edilebilir.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\mathrm{dx}$$

4) İki fonksiyonun toplamının ya da farkının belirli integrali, belirli integrallerin toplamına ya da farkına eşit olur.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\mathrm{dx} + \int_a^b g(x)\mathrm{dx}$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\mathrm{dx} - \int_a^b g(x)\mathrm{dx}$$

SORU

$\int_1^2 (x-2).(x+2)^3\, dx - \int_1^2 (x+2)^4\, dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

SORU

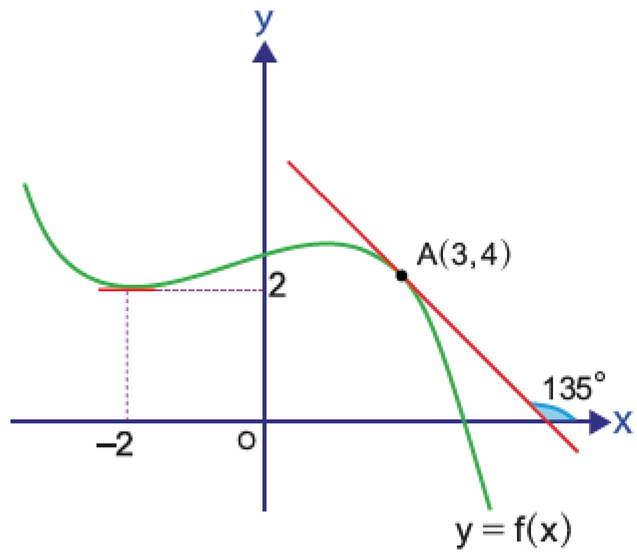
Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f(x)$ fonksiyonuna $A(3,4)$ noktasında çizilen

teğeti, x ekseni ile pozitif yönde 135° lik açı

yaptığına göre $\int_{-2}^{3}[f''(x) + f'(x)]\, dx$

ifadesinin değerini bulunuz.



PARÇALI FONKSİYONLARIN BELİRLİ İNTEGRALİ

$g(x)$ ve $h(x)$ integrallenebilir iki fonksiyon ve $a \leq c \leq b$ olmak üzere

$$f(x)=\begin{cases} g(x) \quad , \quad x<c \quad \text{ise} \\ h(x) \quad , \quad x\geq c \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun [a,b] ndaki integrali

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_a^c g(x)\mathrm{dx} + \int_c^b h(x)\mathrm{dx}$$

biçiminde yazılır.

SORU

$$f(x) = \begin{cases} 6x^2 - 1 \, , x < 2 \quad ise \\ 4x + 1 \; , \quad\quad x \geq 2 \quad ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $\int_{-1}^{3} f(x)$ dx ifadesinin değerini bulunuz.

BELİRLİ İNTEGRAL İLE ALAN HESABI

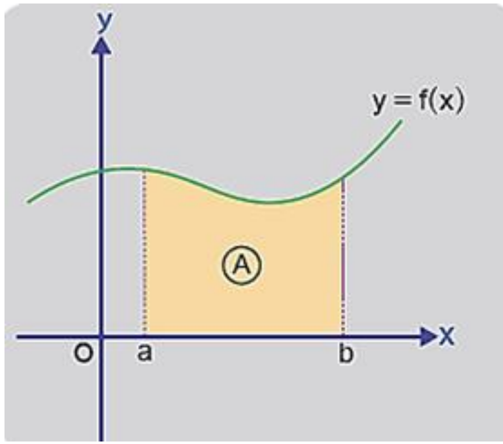
$\mathrm{f}:[\mathrm{a,b}] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı $A = \int_a^a |f(x)|\mathrm{dx}$ integrali ile hesaplanır.

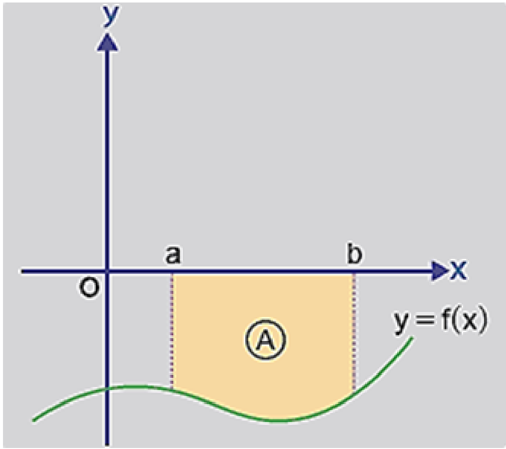
$y = f(x)$ fonksiyonu $[\mathrm{a,b}]$ nda pozitif değerli ise diğer bir ifadeyle $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı x ekseninin üzerinde kalıyorsa $|f(x)| = f(x)$ olur.

Bu bölgenin alanı

$A = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ olur.



y= $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ nda negatif değerli ise diğer bir ifadeyle $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı x ekseninin altında kalıyorsa $|f(x)| = -f(x)$ olur.



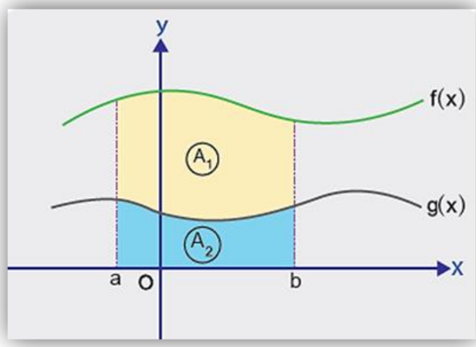
Bu bölgenin alanı

$A = -\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ olur.

İKİ FONKSİYONUN GRAFİĞİ ARASINDA KALAN SINIRLI BÖLGENİN ALANI

Aşağıda gösterilen $\mathrm{f(x)}$ ve $\mathrm{g(x)}$ fonksiyonlarının grafikleri ile $\mathrm{x = a}$ ve

$\mathrm{x = b}$ doğruları arasında kalan sınırlı bölgenin alanı A_1; $g(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı A_2 dir.

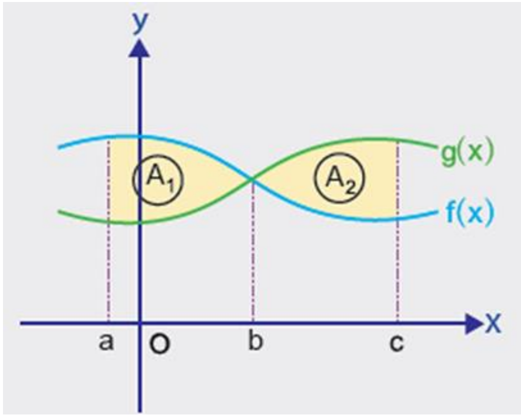


$A_2 = \int_a^b g(x)\mathrm{dx}$ ve $A_1 + A_2 = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ olur. A_2 değeri yerine yazılırsa

$A_1 + \int_a^b g(x)\mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\mathrm{dx} \Rightarrow A_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{dx} - \int_a^b g(x)\mathrm{dx}$

$\Rightarrow A_1 = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{dx}$ elde edilir.

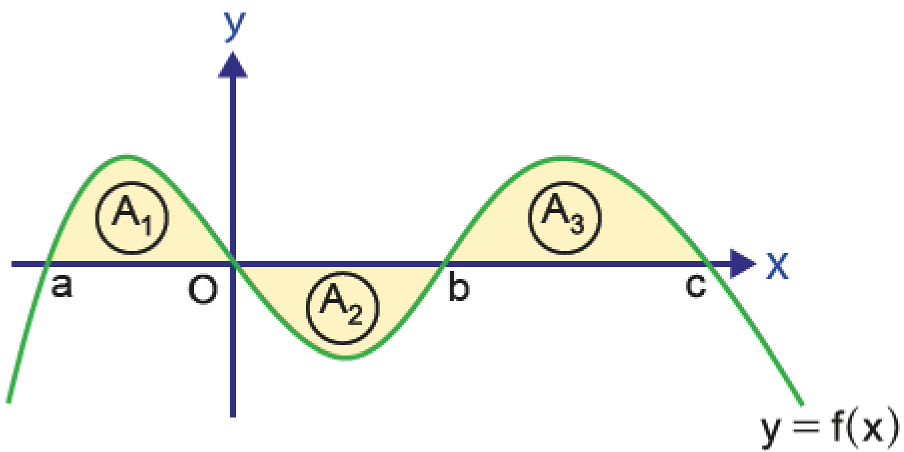
NOT: $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibi verilirse boyalı bölgelerin toplam alanı, A_1ve A_2 alanlarının ayrı ayrı hesaplanarak toplanması ile bulunur.



$$A_1 + A_2 = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{dx} + \int_b^c (g(x) - f(x))\mathrm{dx}$$

SORU

Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.$f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan A_1 ,A_2 ve A_3bölgelerinin alanları sırasıyla 4, 6 ve 3 birimkare olduğuna göre



$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_0^c f(x)\,dx$$

ifadesinin değerini bulunuz.

SORU

$f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ **fonksiyonunun grafiği,**

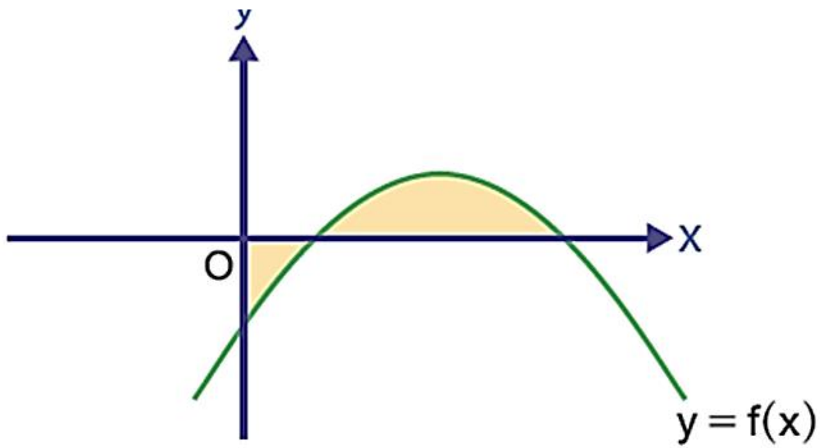
$\boldsymbol{x = 1\ ve\ x = 3}$ **doğruları ile x ekseni arasında**

kalan sınırlı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

SORU

Aşağıda $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre grafikteki boyalı bölgelerin alanlarının toplamını bulunuz.



SORU

Yanda verilen $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x - \frac{10}{3}$

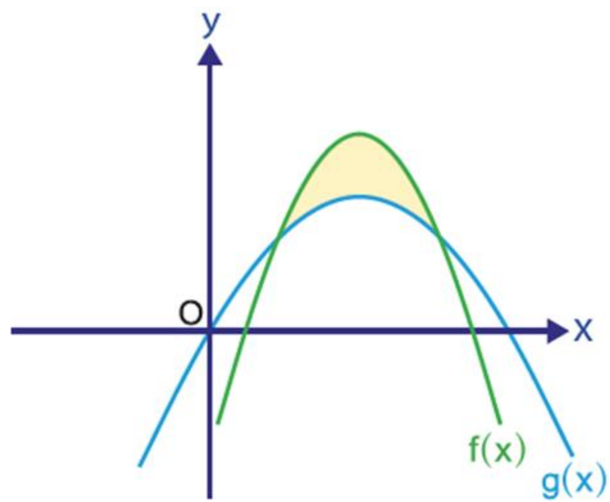
$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}$ x

fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre grafikteki $f(x)\ ve\ g(x)$

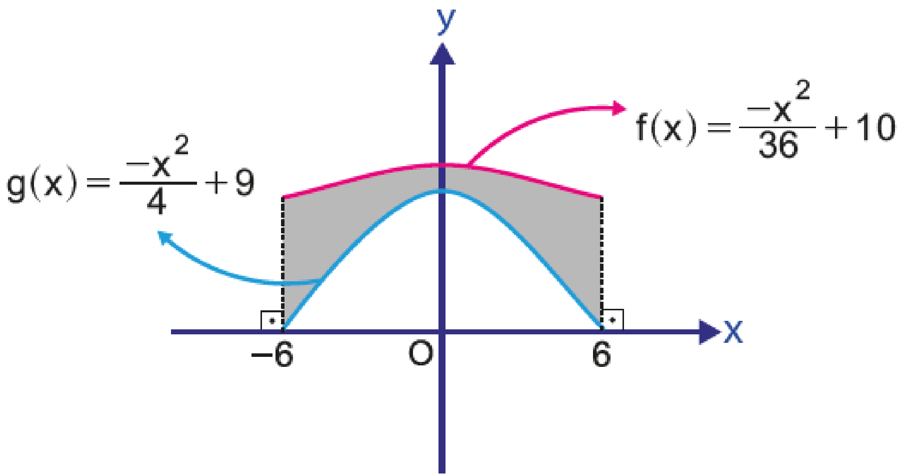
fonksiyonlarının arasında kalan

boyalı bölgenin alanını bulunuz.



SORU

Bu köprü plana uygun olarak yapıldığına göre;



Köprünün yan yüzeylerinin metrekare fiyatı 10 TL olan kaplama malzemesi ile kaplanması durumunda kaplama maliyeti kaç TL olur.

SORU

Yanda $f(x) = 4x^2 - 16x$

$g(x) = -3x^2 + 18x - 27$

fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre grafikteki boyalı bölgelerin

alanlarının toplamını bulunuz.