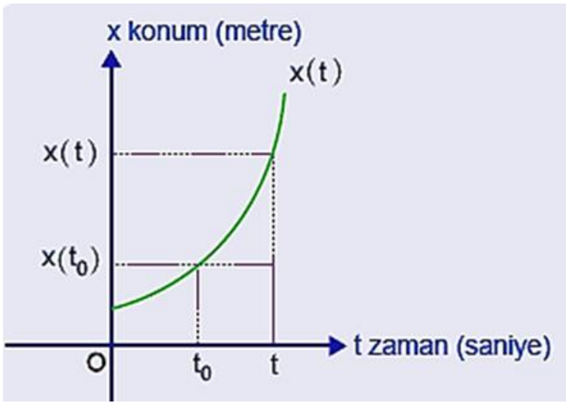
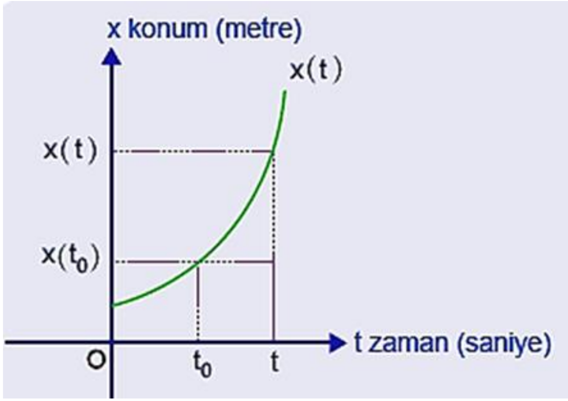
TÜREV

ANLIK DEĞİŞİM ORANI VE TÜREV

DEĞİŞİM ORANI:

Aşağıda doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği verilmiştir. Bu hareketlinin t_0 ve t. saniyeler arasında ortalama hızı; bu hareketlinin konumundaki değişiminin, zamandaki değişime oranı ile hesaplanır.





- V_{ort}: Bu hareketlinin t_0 ve t. saniyeler arasında ortalama hızı
- Δ_x: Konumdaki değişimi
- Δ_t: Zamandaki değişimi olmak üzere;

$$V_{\text{ort}} = \frac{\Delta_x}{\Delta_t} = \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \quad \text{olur.}$$

Burada Δ_x, x bağımlı (t ye bağlı) değişkenin değişimidir.

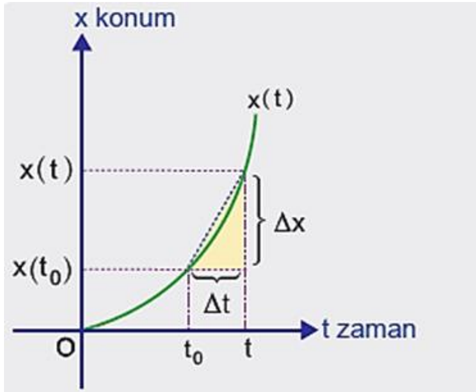
Δ_t, bağımsız değişkenin değişimidir.

Buna göre $V_{\text{ort}} = \frac{\Delta_x}{\Delta_t}$ ifadesine **değişim oranı** denir.

ANLIK DEĞİŞİM ORANI VE TÜREV

Aşağıda doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği gösterilmiştir. Bu hareketlinin t ve t_0. saniyeleri arasındaki ortalama hızı

$V_{\mathrm{ort}} = \frac{\Delta_x}{\Delta_t} = \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ dır.



Bu hareketlinin t_0 anındaki anlık hızı bulunmak istenirse t nin t_0 a yaklaşırken fonksiyonun değişim oranı hesaplanır. Bu oran $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ limiti ile hesaplanır. Bir fonksiyonun t_0 anındaki anlık değişim oranına ise fonksiyonun t_0 noktasındaki **türevi** denir ve $x'(t_0)$ ile gösterilir. Bir fonksiyonun bir noktadaki türevi aynı noktadaki teğetinin eğimine eşittir.

$x'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ olur.

SOLDAN VE SAĞDAN TÜREV

$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{f}: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için

$\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limiti varsa bu limit değerine f fonksiyonunun

$x = a$ noktasındaki **soldan türevi** denir ve $f'(a^-)$ ile gösterilir.

$\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limiti varsa bu limit değerine f fonksiyonunun

$x = a$ noktasındaki **sağdan türevi** denir ve $f'(a^+)$ ile gösterilir.

TÜREV TANIMI

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için f sürekli ise

$\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ise $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

limitine f fonksiyonunun $x = a$ **noktasındaki türevi** denir. $f'(a)$ ile gösterilir.

SORU

Doğrusal olarak hareket eden bir hareketlinin saat olarak zamana bağlı yer değişimi km olarak $f(t) = t^2 + 3t - 2$ fonksiyonu ile tanımlandığına göre bu hareketlinin 2. saatteki anlık hızını $(\text{anlık değişim oranını })$ bulunuz.

SORU

- $f^{'}(x) = 2x^2 + x$
- $f(-1) = 5$

olduğuna göre $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x) - 5}{x + 1}$ ifadesinin değerini bulunuz.

f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi olan $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ifadesinde

$x - a = h$ dönüşümü yapılırsa

$x \to a \Longrightarrow h \to 0$ (x, a ya yaklaşıyor ise h, 0 a yaklaşır.)

$x - a = h \Longrightarrow x = a + h$ olur.

Bu durumda f fonksiyonunun $\mathrm{x} = a$ noktasındaki türevi

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ biçiminde de ifade edilebilir.

SORU

- $f(x) = x^2 - 2ax + b$
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = 4$ olduğuna göre a değerini bulunuz.

TÜREV ALMA KURALLARI

1) $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x) = c$ ise $f'(x) = 0$ olur.

2) $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x) = a \cdot x^n$ ise $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ olur.

NOT : $\frac{d}{d_x}$ ifadesi türev operatörü ise;

1) $\frac{d}{d_x} f(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{dx}} = f'(x)$

2) $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = y'$ biçiminde gösterilir.

2. MERTEBEDEN TÜREV : Bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi olan $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{dx}}$ için

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{dx}}\right) = \frac{d^2 f(x)}{\mathrm{dx}^2}$$

ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun **ikinci mertebeden türevi** denir ve ile $f''(x)$ gösterilir.

SORU

$f(x) = x^2 . \sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

SORU

$f(x) = ax^2$ fonksiyonunun $x = -\frac{1}{4}$ apsisli noktasında çizilen teğeti,

$g(x) = \frac{2}{ax}$ fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasında çizilen teğetine paralel

olduğuna göre a nın pozitif değerini bulunuz.

BİR FONKSİYONUN BİR NOKTADA VE BİR ARALIKTA TÜREVLENEBİLİRLİĞİ

$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ ve $\mathrm{f}: \mathrm{A} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için f sürekli olmak üzere

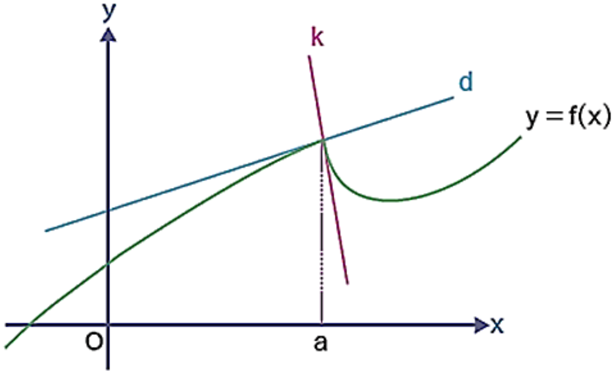
f fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki sağdan ve soldan türevleri birbirine eşit ise

f fonksiyonu $x = a$ apsisli noktasında türevlenebilirdir.

$f'(a^+) = f'(a^-) = k \Rightarrow f'(a) = k$ olur.

Bir f fonksiyonu (a,b) ndaki her noktada türevlenebilir ise bu fonksiyon (a,b) nda türevlenebilirdir.

Aşağıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelenirse a ya soldan yaklaşırken eğriye çizilen teğetin d doğrusu ve a ya sağdan yaklaşırken çizilen teğetin k doğrusu olduğu görülür.

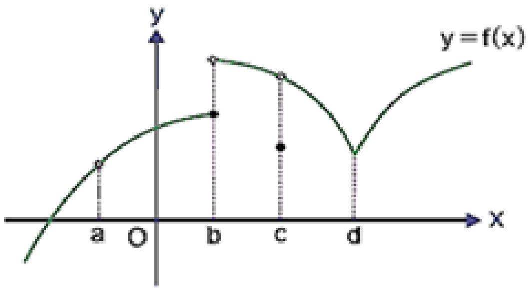


Bu durumda d doğrusunun eğimi m_d ve k doğrusunun eğimi m_k olarak ifade edilirse

$f'(a^+) = m_k$, $f'(a^-) = m_d$ olur.

Burada $m_d \neq m_k$ olduğundan fonksiyonun a noktasındaki sağdan ve soldan türevleri farklıdır. O hâlde f fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasında türevi yoktur. f fonksiyonunun, $x = a$ apsisli noktasında sürekli olmasına rağmen bu noktada türevi yoktur. Bu tür noktalara fonksiyonun **kırılma noktası** denir.

Aşağıda verilen $\mathbb{R} - \{a\}$ kümesinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonun grafiğini inceleyelim



1) f fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta b ve c apsisli noktalarda süreksizdir. Bir fonksiyonun bir noktadaki türevi fonksiyonun grafiğine o noktasında çizilen teğetinin eğimine eşit olduğundan fonksiyonun b ve c noktalarında türevi yoktur.
2) f fonksiyonunun d apsisli noktası fonksiyonun kırılma noktası olduğundan fonksiyonun bu noktada da türevi yoktur.

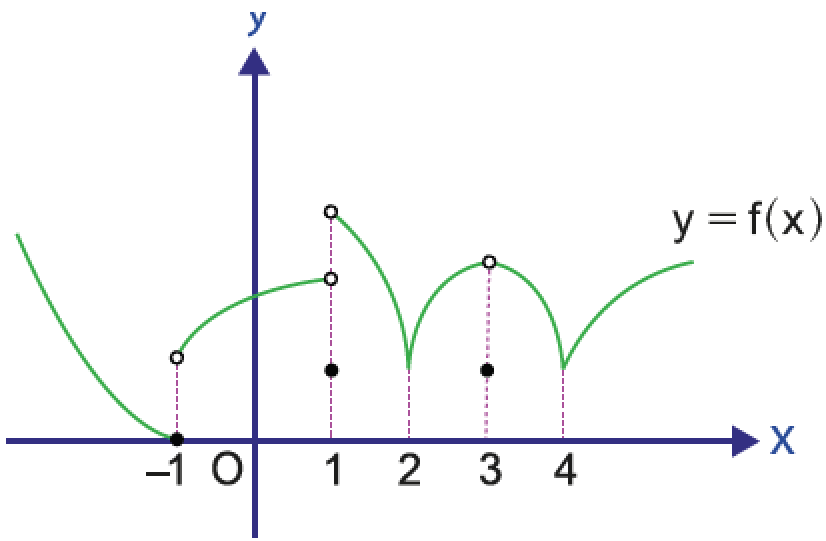
SONUÇ:

1) Bir fonksiyon bir $x = a$ apsisli noktada sürekli değilse $x = a$ apsisli noktada türevli de değildir.

2) Bir fonksiyon türevli olduğu her noktasında süreklidir.

3) Bir fonksiyonun kırılma noktalarında türevi yoktur.

SORU



Yukarıda y= $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun

a) Türevli olmadığı noktaların apsislerini bulunuz.

b) Sürekli olduğu h$\hat{a}$lde türevli olmadığı noktaların apsislerini bulunuz.

c) Limiti olduğu h$\hat{a}$lde türevli olmadığı noktaların apsislerini bulunuz.

SORU

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & , \quad x<1 \ \ ise \\ bx-2 & , \quad 1\le x<2 \quad ise \\ ax^2-2bx+c & , \quad 2\le x \quad ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu x$=1$ apsisli noktasında türevli olup $x=2$ apsisli noktasında sürekli <u>olmadığına</u> göre c nin <u>alamayacağı</u> değeri bulunuz.

İKİ FONKSİYONUN TOPLAMININ VE FARKININ TÜREVİ

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere;

1) $\frac{d}{\mathrm{dx}}\big((f+g)(x)\big) = (f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

2) $\frac{d}{\mathrm{dx}}\big((f-g)(x)\big) = (f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$

olur.

SORU

- $\mathrm{f}(x) = ax^2 - 2ax$
- $g(x) = bx^3 + bx$
- $(f+g)'(1) = (f-g)'(2)$

olduğuna göre a ile b arasındaki ilişkiyi bulunuz.

İKİ FONKSİYONUN ÇARPIMININ VE BÖLÜMÜNÜN TÜREVİ

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere;

1) $\frac{d}{\mathrm{dx}}\big((f \cdot g)(x)\big) = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

2) $\frac{d}{\mathrm{dx}}\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$ $(g(x) \neq 0)$ olur.

SORU

$f(x) = (x^2 - x)(x^3 - x + 1)$

fonksiyonunun $\mathrm{x} = 2$ noktasındaki türevinin değerini bulunuz.

İKİ FONKSİYONUN BİLEŞKESİNİN TÜREVİ

$f(x)$ fonksiyonu x noktasında türevli , $g(x)$ fonksiyonu $f(x)$ noktasında türevli ise $\mathrm{gof}(x)$ fonksiyonu x noktasında türevlidir ve

$(\mathrm{gof})'(x) = \left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ olur.

$\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ türevi $\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{du}} \cdot \dfrac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$ biçiminde yazılır. Bu kurala **zincir kuralı** denir.

SORU

- $f(x) = 2x^3 - x$
- $g(x) = \frac{1}{x} - 1$

olduğuna göre $(fog)(x)$ fonksiyonunun $\mathrm{x} = -1$ noktasındaki türevinin değerini bulunuz.

SORU

- $x = u^2 - 1$
- $u = 3t - 1$

olduğuna göre $\frac{dx}{dt}$ ifadesinin $\mathrm{t} = 1$ için değerini bulunuz.

SORU

Pozitif gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için

- $f(x^2) = g(3x^2 + 1) - x^3 + 4x$
- $g'(13) = 2$

olduğuna göre f $'(4)$ değerini bulunuz.

SORU

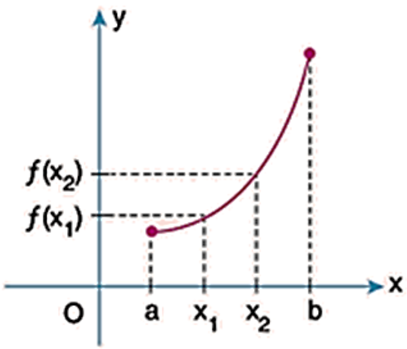
- $f(x) = x^3 - x$
- $g(x) = x^2 + x$

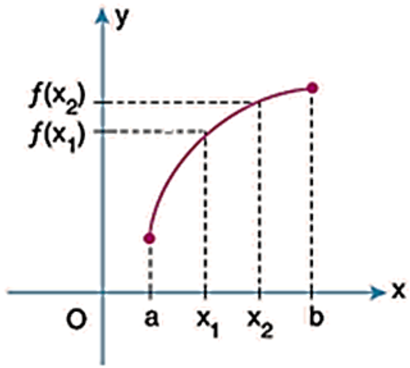
olduğuna göre $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$ ifadesinin değerini bulunuz.

TÜREV UYGULAMALARI

BİR FONKSİYONUN ARTAN OLDUĞU ARALIKLAR

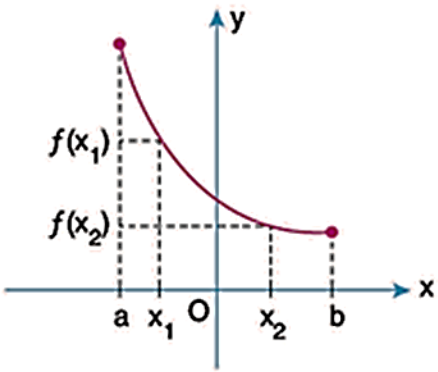
f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in$ [a,b] için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu [a,b] nda artandır.

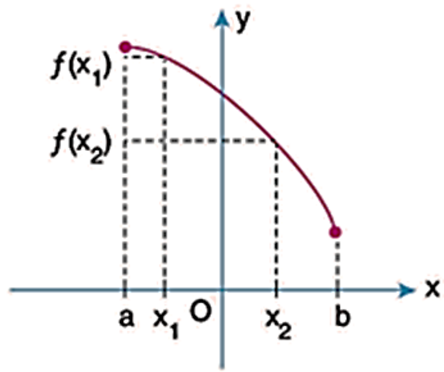




BİR FONKSİYONUN AZALAN OLDUĞU ARALIKLAR

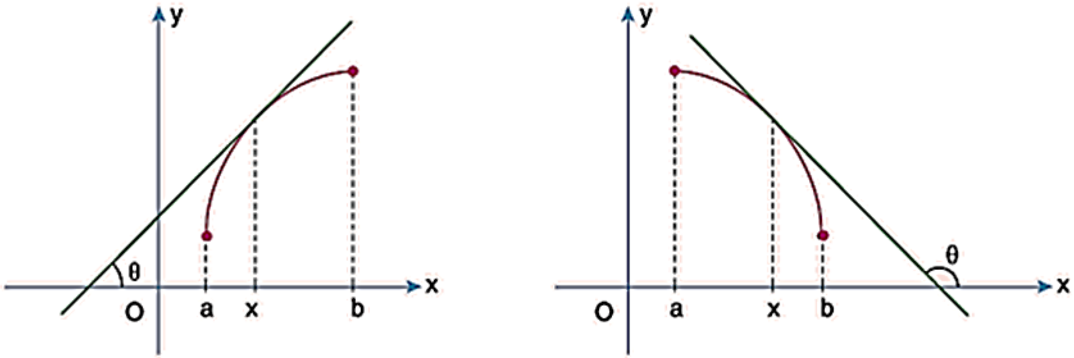
f: $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in$ [a,b] için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu [a,b] nda azalandır.





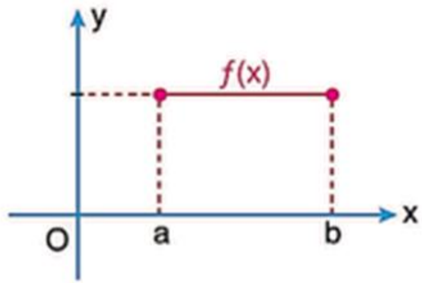
BİR FONKSİYONUN ARTAN VEYA AZALAN OLDUĞU ARALIKLAR

f fonksiyonu $[a,b]$ nda artan ise bu aralığın her noktasında teğetinin eğimi pozitif (θdar açı), azalan ise teğetinin eğimi negatiftir (θgeniş açı).



(θ dar açı olduğundan m = tan θ pozitiftir.) (θ geniş açı olduğundan m = tan θ negatiftir.)

f: $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$, y=f(x) sabit fonksiyon ise $m = \tan\theta = 0$ dır.



SONUÇ:

f: $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$, y=f(x) fonksiyonu (a,b) nda türevlenebilir olsun. $\forall x \in$ (a,b) için

1) $f'(x) > 0 \Rightarrow y = f(x)$ artan fonksiyondur.
2) $f'(x) < 0 \Rightarrow y = f(x)$ azalan fonksiyondur.
3) $f'(x) = 0 \Rightarrow y = f(x)$ sabit fonksiyondur.

SONUÇ: Gerçek sayılar kümesinde tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonu için $f'(x) = ax^2 + bx + c$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde

- **a > 0 ve $\Delta \leq 0$ ise f fonksiyonu daima artandır.**
- **$a < 0$ ve $\Delta \leq 0$ ise f fonksiyonu daima azalandır.**

SORU

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x - 5$

fonksiyonunun azalan olduğu <u>en geniş</u> aralığı bulunuz.

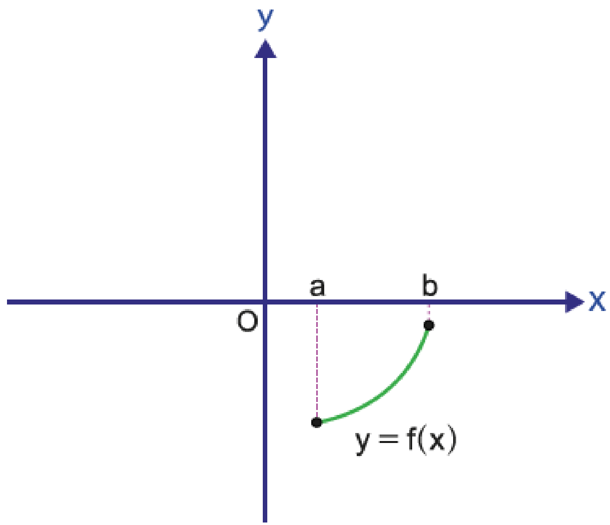
SORU

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2ax^2 + ax - 2$

fonksiyonu <u>daima</u> artan olduğuna göre a nın alabileceği değer aralığını bulunuz.

SORU

Yanda $[a, b]$ nda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre aşağıda verilen fonksiyonların $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ nda artan veya azalan olup olmadıklarını bulunuz.

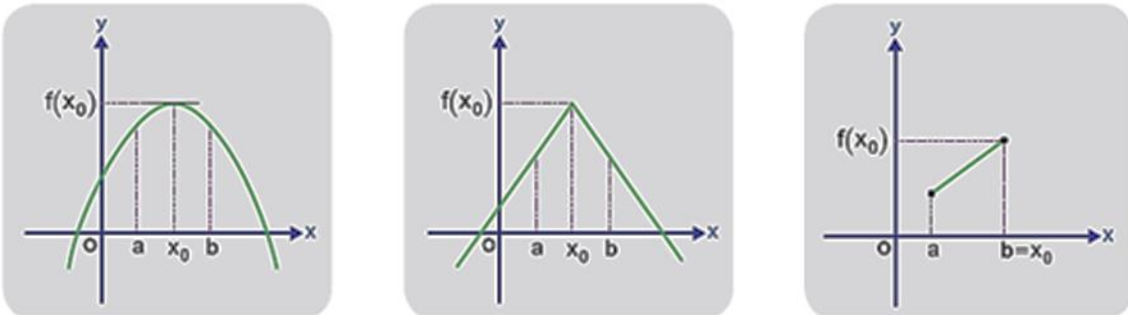
a) $\dfrac{f(x)}{x}$

b) $f^2(x)$

TÜREV UYGULAMALARI

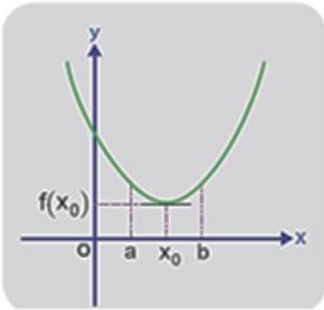
BİR FONKSİYONUN YEREL MAKSİMUM VE MUTLAK MAKSIMUM NOKTALARI

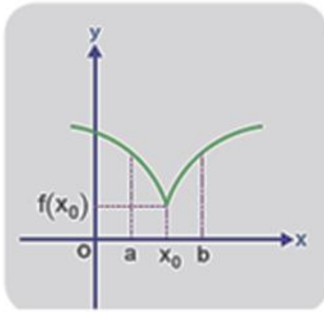
f: $A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $(a,b) \subseteq A$olmak üzere bir $x_0 \in (a,b)$ için fonksiyonun bu aralıktaki en büyük değeri $f(x_0)$ oluyorsa $(x_0, f(x_0))$ noktasına f fonksiyonunun bir **yerel maksimum noktası** denir.

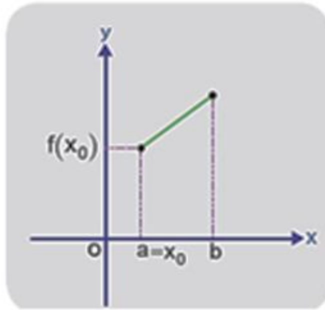


BİR FONKSİYONUN YEREL MİNİMUM VE MUTLAK MINIMUM NOKTALARI

$\mathrm{f}: \mathrm{A} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $(\mathrm{a,b}) \subseteq A$ olmak üzere bir $x_0 \in (\mathrm{a,b})$ için fonksiyonun bu aralıktaki en küçük değeri $f(x_0)$ oluyorsa $(x_0,\mathrm{f}(x_0))$ noktasına f fonksiyonunun bir **yerel minimum noktası** denir.

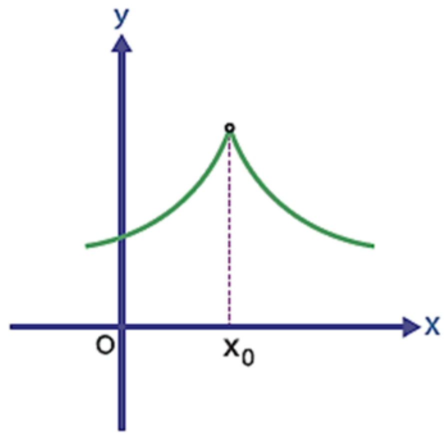




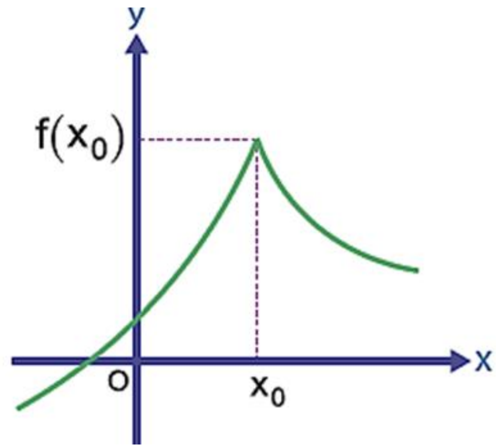


NOT: Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına genel olarak **ekstremum noktaları** denir.

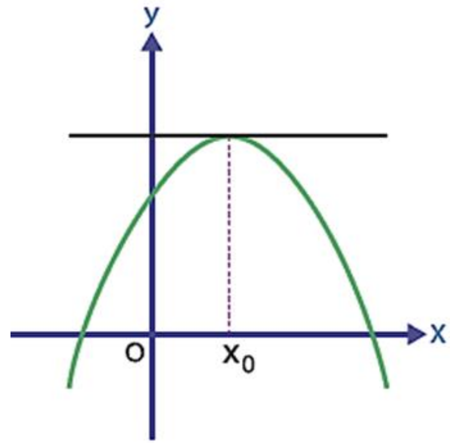
Yanda grafiği verilen fonksiyon x_0 apsisli noktada tanımlı olmadığı için fonksiyonun bu noktada ekstremum noktası yoktur.



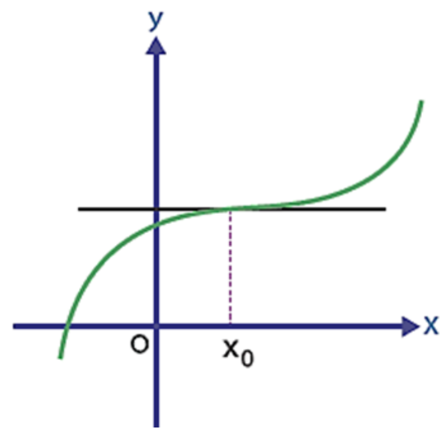
Yanda grafiği verilen fonksiyonun x_0 noktası kırılma noktası olduğundan fonksiyonun x_0 noktasında türevi yoktur. Ancak fonksiyonun $(x_0, f(x_0))$ noktasında bir yerel maksimumu vardır.



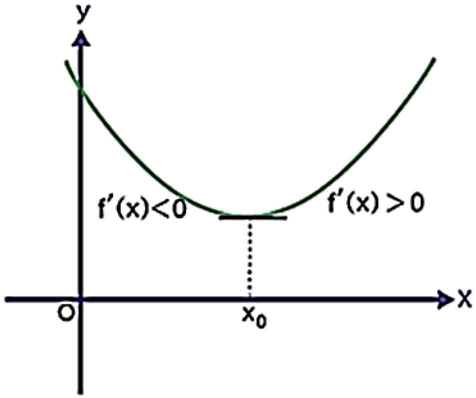
Yanda grafiği verilen fonksiyonun x_0 apsisli noktasında bir ekstremum noktası vardır. Bu noktada çizilen teğet x eksenine paralel olacağından bu teğetin eğimi sıfırdır. Bu yüzden $f'(x) = 0$ olur.

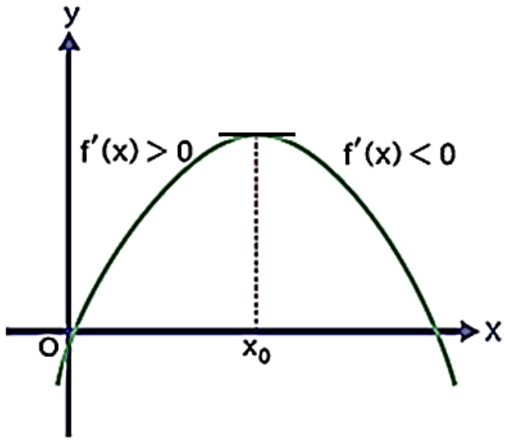


Yanda grafiği verilen fonksiyonun x_0 apsisli noktasındaki teğetinin eğimi sıfır $(f'(x) = 0)$ olmasına rağmen bu nokta ekstremum noktası değildir.



SONUÇ:





- Bir fonksiyonun türevinin sıfır olduğu noktanın ekstremum noktası olabilmesi için fonksiyonun türevinin o noktada işaret değiştirmesi gerekir.
- Bir fonksiyonun azalanlıktan artanlığa geçtiği noktaya **yerel minimum noktası** denir.
- Bir fonksiyonun artanlıktan azalanlığa geçtiği noktaya **yerel maksimum noktası** denir.

SORU

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 2$

fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

SORU

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + k$

fonksiyonunun yerel minimum değeri $\frac{22}{3}$ olduğuna göre k değerini bulunuz.

SORU

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - mx^2 + nx - 2$

fonksiyonunun ekstremum noktalarından biri $\mathrm{A}(-1,2)$ olduğuna göre diğer ekstremum noktasını bulunuz.

SORU

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + ax^2 - bx - 2$

fonksiyonuna $\mathrm{x} = -1$ apsisli noktasından çizilen teğeti, x ekseni ile pozitif yönde 45° lik açı yapmaktadır. f fonksiyonunun $\mathrm{x} = 1$ noktasında bir ekstremumu olduğuna göre $\frac{b}{a}$ oranını bulunuz.

SORU

Yanda $y = \mathrm{f}(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. Buna göre

a) f fonksiyonunun yerel minimum noktalarının apsislerini bulunuz.

b) f fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisini bulunuz.