LİMİT VE SÜREKLİLİK

BİR FONKSİYONUN BİR NOKTADAKİ LİMİTİ İLE SOLDAN VE SAĞDAN LİMİT KAVRAMLARI

Yaklaşım Kavramı:

x değişkeni bir a sayısına, a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya **soldan yaklaşma**, a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya **sağdan yaklaşma** denir.

x değişkeninin a sayısına soldan yaklaşması $\boldsymbol{x \to a^-}$,

sağdan yaklaşması $x \to \boldsymbol{a^+}$ şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki tabloda x değişkeninin 5 sayısına, 5 ten küçük ve 5 ten büyük sayılarla yaklaşması gösterilmiştir

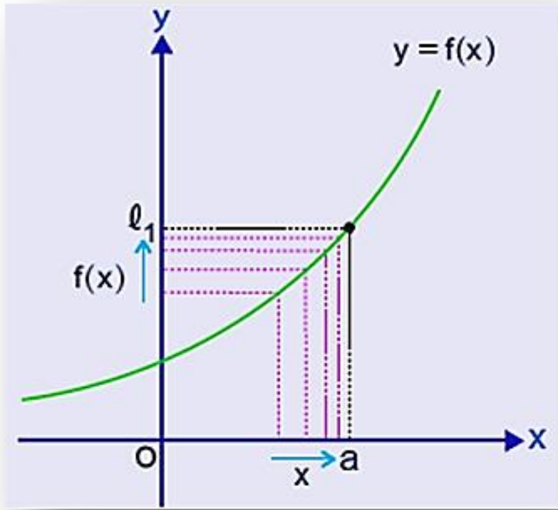
$\longrightarrow 5 \longleftarrow$

x	4,5	4,9	4,99	4,999	4,9999	...	...	5,0001	5,001	5,01	5,1	5,5

LİMİT KAVRAMI

$f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a ya soldan yaklaşırken $f(x)$ in ℓ_1 gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir. ℓ_1 gerçek sayısına $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki **soldan limiti** denir ve

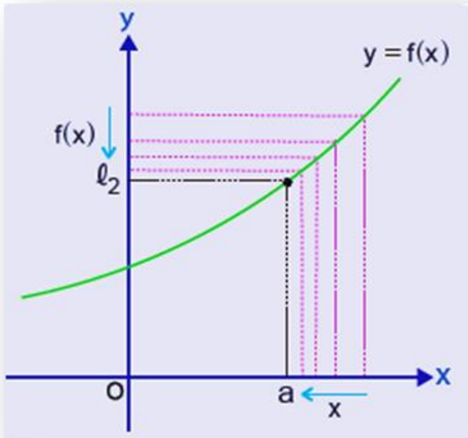
$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_1$ şeklinde gösterilir.



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a ya sağdan yaklaşırken $f(x)$ in ℓ_2 gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

ℓ_2 gerçek sayısına $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki **sağdan limiti** denir ve

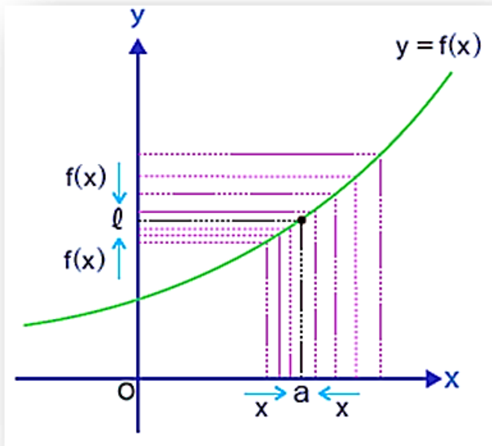
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell_2$ şeklinde gösterilir.



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a ya soldan ve sağdan yaklaşırken

$f(x)$ in ℓ gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir. ℓ gerçek sayısına $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki **limiti** denir ve

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ biçiminde gösterilir.



SONUÇ:

1-) Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasında limitinin olması için bu noktadaki sağdan ve soldan limitleri birbirine eşit olmalıdır.

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell_1$ ve $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell_2$ ise $\ell_1 = \ell_2 = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

2-) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ yoktur.

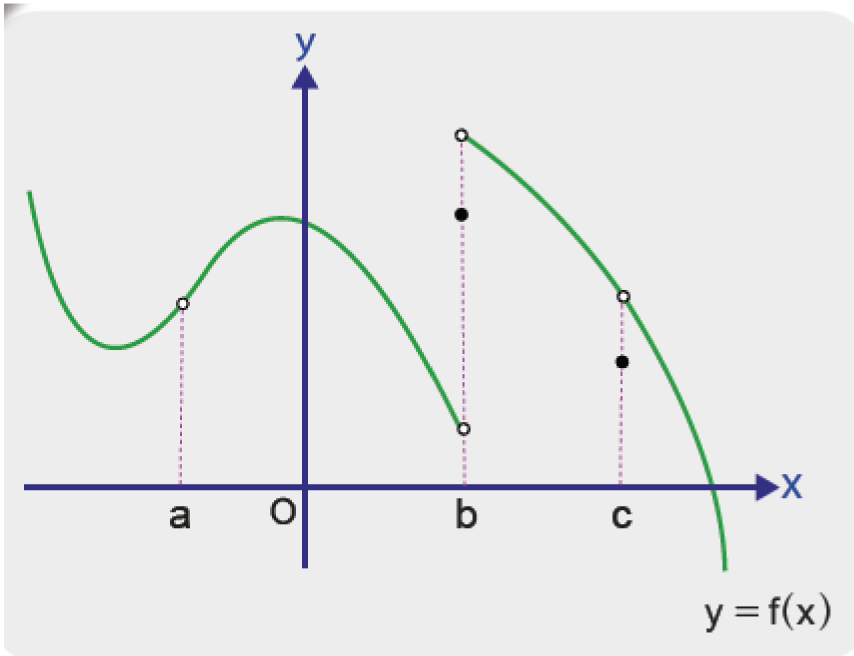
3-) Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için fonksiyonun o noktada tanımlı olma zorunluluğu yoktur.

4-) Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, fonksiyonun o noktadaki değerinden farklı olabilir.

5-) Bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa bu limit tektir.

NOT

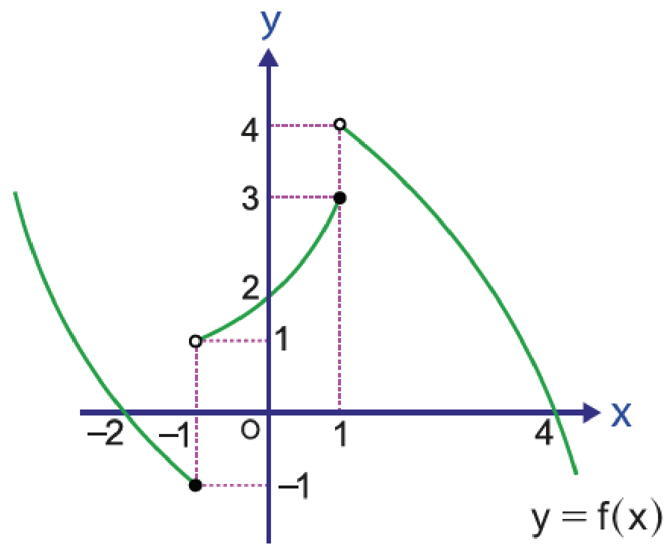
Bir fonksiyonun grafiği üzerindeki kopukluk olan noktalara **kritik noktalar** denir. $y = f(x)$ fonksiyonunun tanımlı olmadığı $x = a$ noktası ile $x = b$ ve $x = c$ apsisli noktaları kritik noktalardır. Bu noktalarda limit araştırılırken sağdan ve soldan limitler incelenmelidir. Eğer limit araştırılan nokta, kritik nokta değilse fonksiyonun limiti, fonksiyonun o noktadaki değerine eşittir.



SORU:

$f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu grafiğe göre

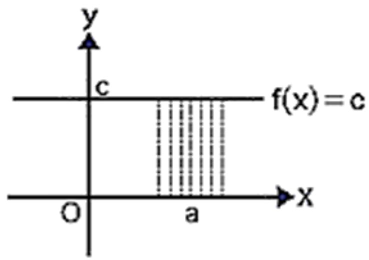
$-2, -1, 0, 1, 4$ noktalarındaki limit değerlerini bulunuz.



LİMİTİN ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

ÖZELLİK 1:

a,c ∈ $\mathbb{R}$ ve $f(x) = c$ sabit fonksiyon olmak üzere $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ olur.



ÖZELLİK 2:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinom fonksiyonu olmak üzere her c gerçek sayısı için $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ olur.

SORU:

$$\lim_{x \to 3} (x^2 + ax - 3b) = -6$$

olduğuna göre a nın b türünden eşitini bulunuz.

SORU:

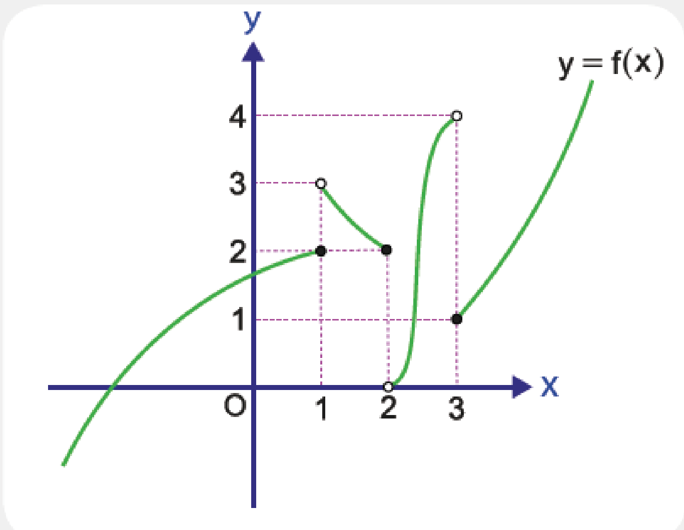
$$a = \lim_{x \to \frac{\pi}{24}} \sin x$$

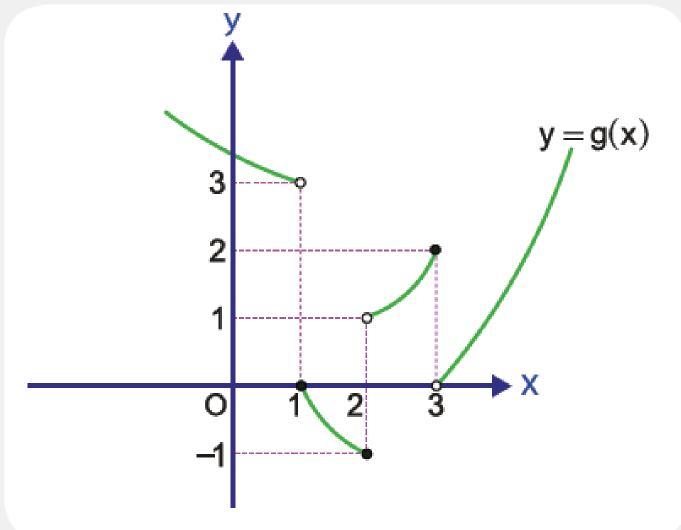
$$b = \lim_{x \to \frac{\pi}{24}} \cos x$$

$$c = \lim_{x \to \frac{\pi}{12}} \cos x$$

olduğuna göre $a \cdot b \cdot c$ çarpımınının değerini bulunuz.

SORU:





Yukarıda $f(x)$ ve $g(x)$fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(f^2(x) - \sqrt[3]{g(x)} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \left(\dfrac{1}{f(x)} + g(x) \right)$

ÖZELLİK : $\lim_{x \to a} |f(x)| = \left| \lim_{x \to a} f(x) \right|$ olur.

SORU:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x - 21$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre ifadesinin $\lim_{x \to -2} |f(x)|$ **değerini bulunuz.**

ÖZELLİK :

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$,a$\in\mathbb{R}^+$ ve a$\neq 1$ olmak üzere x$=c$ noktasındaki limiti $\lim\limits_{x\to c} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$

SORU

$\lim\limits_{x\to 1} 3^{x^2-x+1}$

limitinin değerini bulunuz.

ÖZELLİK

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+$,a$\in\mathbb{R}^+$ ve a$\neq 1$ ve $f(x)>0$ olmak üzere $\log_a f(x)$ fonksiyonunun

x$=c$ noktasındaki limiti $\lim\limits_{x\to c}[\log_a f(x)] = \log_a\left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)$ olur.

SORU:

$\lim\limits_{x\to 2}[\log_7(x^3-x+1)]$

limitinin değerini bulunuz.

PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTİ

- Parçalı tanımlı fonksiyonlarda kritik noktanın dışındaki bir noktanın limiti araştırılırken o nokta fonksiyonun hangi parçasına dahilse o parçada limit araştırılır.
- Kritik noktada fonksiyonun kuralı değiştiğinden bu noktada limit araştırılırken sağdan ve soldan limitleri incelenmelidir.

SORU:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & , \quad x < 1 \; ise \\ 2ax & , \quad 1 \leq x < 2 \; ise \\ x^2 - bx - a - 1 & , \quad 2 \leq x \; ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\boldsymbol{f(x)}$ fonksiyonunun her $\boldsymbol{x}$ gerçek sayısı için limiti olduğuna göre $\boldsymbol{a+b}$ toplamını bulunuz.

LİMİTTE BELİRSİZLİK DURUMU

Çarpanlarına ayrılabilen gerçek sayılarda tanımlı $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ ve $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ olması durumunda

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği oluşur.

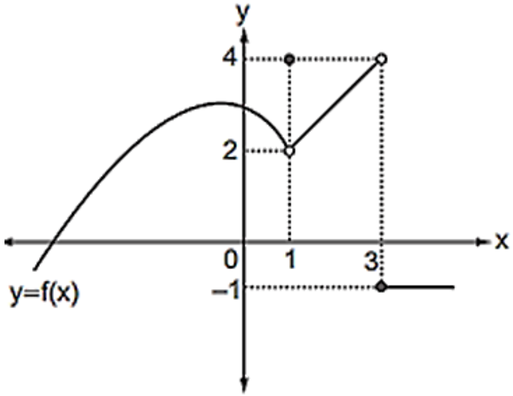
Belirsizliği gidermek için pay ve payda çarpanlarına ayrılır.

Pay ve paydadaki çarpanlar sadeleştirilerek belirsizlik giderilir.

SORU

$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{2x^2-x-6}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

SORU:



Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = a$ **ve** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = b$

olduğuna göre $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{x^2 - a}{x - b}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

SORU: $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+ax-6}{x-2} = b$

olduğuna göre $\boldsymbol{a+b}$ toplamının değeri kaçtır?

SORU: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$ **limitinin değerini hesaplayınız.**

SÜREKLİLİK

$A \sqsubseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $a \in A$ olmak üzere $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $x = a$ **noktasında süreklidir** denir.

Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise f fonksiyonu A **kümesinde süreklidir.**

NOT: Polinom fonksiyonlarının en geniş tanım kümesi gerçek sayılar kümesi ve her noktadaki limiti o noktadaki görüntüsüne eşit olduğu için polinom fonksiyonlar her $\boldsymbol{x}$ **gerçek sayısı için süreklidir**.

NOT: $f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom fonksiyon olmak üzere $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ biçimindeki fonksiyonlar tanımlı oldukları **en geniş kümede süreklidir.**

SORU:

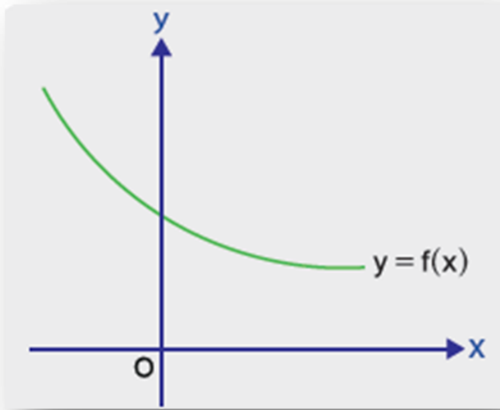
$$f(x) = \frac{x^2-2x-2}{2x^2-x+a}$$

fonksiyonunun sürekli olduğu <u>en geniş</u> küme $\mathbb{R} - \{\boldsymbol{k}\}$

olduğuna göre $\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{a}}$ oranını bulunuz.

BİR FONKSİYONUN GRAFİĞİ ÜZERİNDE SÜREKLİ VE SÜREKSİZ OLDUĞU NOKTALAR

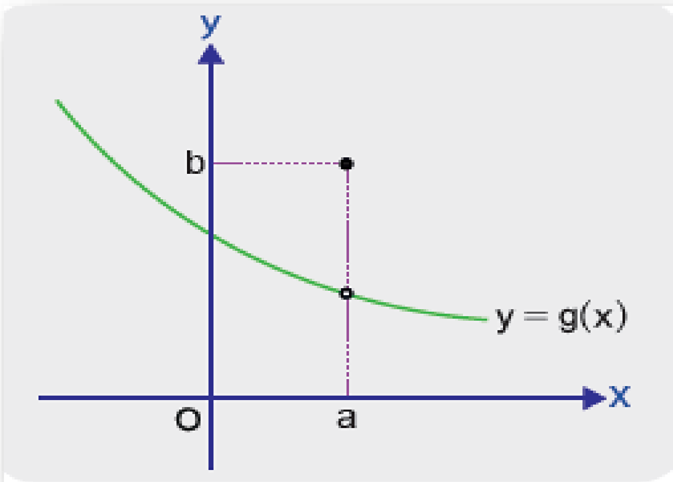
Grafiği verilen f fonksiyonu her x gerçek sayısı için tanımlı ve her noktadaki limiti fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit olacağından fonksiyon her x gerçek sayısı için süreklidir. Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R}$ olur.



Grafiği verilen g fonksiyonu $x = a$ noktasında tanımlı ve limite sahip olmasına rağmen bu noktadaki limiti görüntüsüne eşit olmadığından

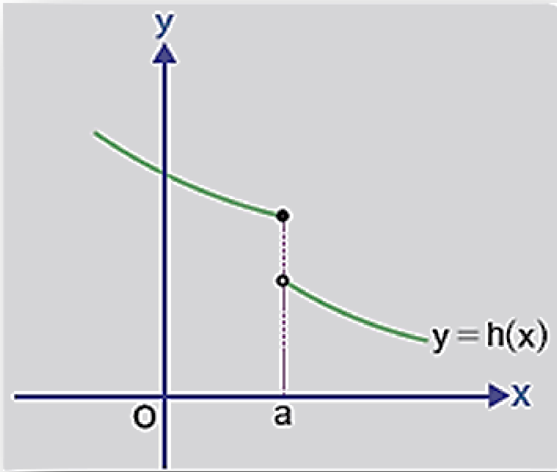
g fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada sürekli değildir.

Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{a\}$ olur.



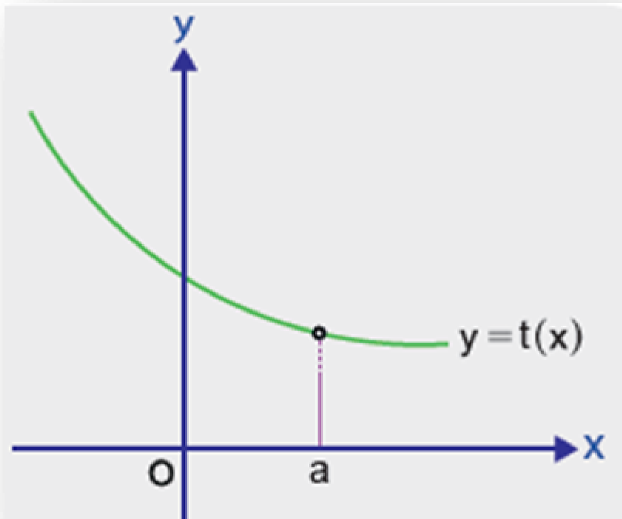
Grafiği verilen h fonksiyonu $x = a$ noktasında tanımlı olmasına rağmen bu noktada limiti olmadığından fonksiyon $x = a$ apsisli noktasında sürekli değildir.

Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{a\}$ olur.



Grafiği verilen t fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada tanımlı olmadığından a değeri fonksiyonun sürekli olduğu en geniş kümenin bir elemanı olamaz.

Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{a\}$ olur.



SONUÇ:

$A \sqsubseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ $f(x)$ bir fonksiyon olsun. $a \in A$ olmak üzere

$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu $x = a$ noktasında **sağdan süreklidir.**

$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu $x = a$ noktasında **soldan süreklidir.**

$[\mathrm{a,b}]$ nda tanımlı bir fonksiyon $(\mathrm{a,b})$ nda sürekli, $x = a$ noktasında sağdan sürekli, $x = b$ apsisli noktasında soldan sürekli ise f fonksiyonu $[\mathrm{a,b}]$ nda **süreklidir.**

SORU:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2b, & x < 1 \quad ise \\ 3x - 2a, & 1 \leq x < 3 \quad ise \\ bx - 6\,, & 3 \leq x \quad ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $\boldsymbol{f(x)}$ fonksiyonu her x gerçek sayısı

için sürekli olduğuna göre a $\cdot$ $\boldsymbol{b}$ çarpımını bulunuz.

SORU:
AYT/2019

a bir gerçel sayı olmak üzere gerçel sayılar kümesi

üzerinde bir f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} a - x\,, & x < 1 \\ 5x - 4\,, & 1 \leq x \leq 5 \\ (x-a)^2 + 12\,, & x > 5 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

f fonksiyonunun sürekli olmadığı yalnızca bir nokta olduğuna göre,

$f(7) - f(0)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

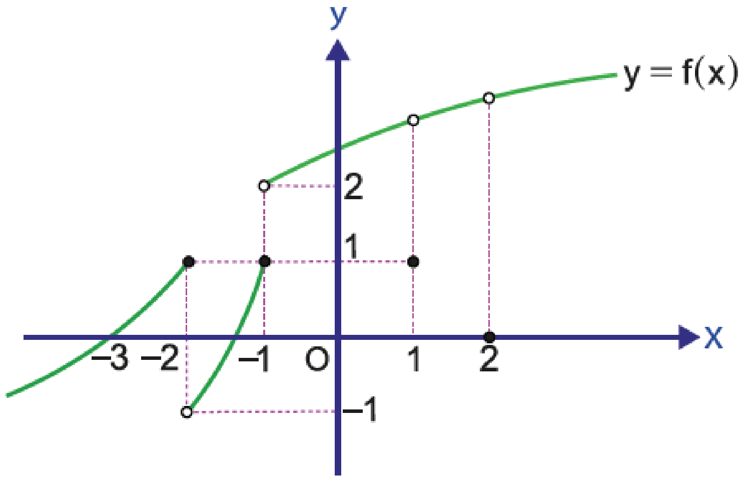
SORU:

$$f(x) = \frac{x+2}{ax^2-3x+2}$$

fonksiyonu her x gerçek sayısı için sürekli olduğuna göre

a nın alabileceği <u>en küçük</u> tam sayı değerini bulunuz.

SORU:



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre

a) $f(x)$ fonksiyonunun hangi x değerleri için sürekli olmadığını bulunuz.

b) $f(x)$ fonksiyonunun limitinin olduğu fakat sürekli olmadığı x değerlerini bulunuz.