

GERÇEK SAYI DİZİLERİ

DİZİ TANIMI: Pozitif tam sayılar kümesinden gerçekte sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyona **gerçek sayı dizisi** ya da kısaca **dizi** denir.

$f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(n) = a_n$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(n) \in \mathbb{R}$ olur.

1.terim $f(1) = a_1$

2. terim $f(2) = a_2$

3. Terim $f(3) = a_3$

⋮

n.terim olan $f(n) = a_n$ şeklinde gösterilir.

n. terim olan a_n terimine dizinin **genel terimi**, n sayısına dizinin **indisi** denir.

Genel terim dizinin bütün terimlerini üretir. Genel terimi a_n olan dizi (a_n) olarak gösterilir.

Genel terimi verilmeyen sayı grupları dizi belirtmez.

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$ dizisinde $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ gerçekte sayılarına **dizinin terimleri** denir.

SORU

Aşağıda verilen fonksiyonların $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için bir gerçek sayı dizisi olup olmadığını bulunuz.

a) $f(n) = \frac{n+4}{n-3}$

b) $f(n) = \frac{2n-1}{3n-1}$

c) $f(n) = \sqrt[3]{n^2 - 4} + \sqrt[5]{n - 7}$

d) $f(n) = \log(n^2 - 36)$

SONLU DİZİ

$k \in \mathbb{Z}^+$ ve $A_k \subseteq \mathbb{Z}^+$ ise $A_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ kümesinden reel sayılara tanımlanan her fonksiyona **sonlu dizi** denir.

$a_n: A_k \rightarrow \mathbb{R}$ ise a_n sonlu dizisinin elemanları $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_k)$ biçiminde gösterilir.

SORU

$A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $a_n: A_5 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$(a_n) = \left(\frac{4+n}{n}\right)$ sonlu dizisi tanımlanıyor.

Buna göre (a_n) dizisinin terimleri çarpımı kaçtır?

SABİT DİZİ

$c \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için genel terimi $a_n = c$ olan diziye **sabit dizi** denir.

$a_1 = c, a_2 = c, a_3 = c, \dots$ biçimindeki sabit dizi

$(a_n) = (c, c, c, c, \dots, c, \dots)$ şeklinde gösterilir.

SORU

Genel terimi $a_n = 2k(n - 1) + 3n - 1$

olan dizi sabit dizi olduğuna göre a_5 değeri kaçtır?

SORU

$a_n = \left(\frac{k-3n}{4n+2}\right)$ sabit dizi olduğuna göre

(a_n) dizisinin ilk 40 terim toplamını bulunuz.

EŞİT DİZİLER

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n = b_n$ oluyorsa (a_n) ve (b_n) dizilerine **eşit diziler** denir.

$(a_n) = (b_n)$ şeklinde gösterilir.

SORU

$$(a_n) = \left(\frac{4n^2 - 9}{2n - k} \right)$$

$$(b_n) = (2n + 3)$$

dizileri eşit olduğuna göre k değeri kaçtır?

GENEL TERİMİ VEYA İNDİRGEME BAĞINTISI VERİLEN BİR SAYI DİZİSİNİN TERİMLERİ

Bir terimi kendinden önceki bir veya birkaç terim cinsinden tanımlanabilen dizilere **indirgemeli dizi**, tanımlama bağıntısına da **indirgeme bağıntısı** denir.

SORU

$a_{n+1} = a_n + 6n$ indirgeme bağıntısı ile verilen
 (a_n) dizisinde $a_1 = 4$ olduğuna göre (a_n) dizisinin
genel terimini bulunuz.

(a_n) gerçel sayılar dizisi her n pozitif tamsayısı için

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^n \cdot a_n}{2} \text{ eşitliğini sağlamaktadır.}$$

$a_5 = 18$ olduğuna göre a_1 kaçtır?

SORU

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 5a_n \quad (n \geq 1)$$

biçiminde indirgeme bağıntısı verilen (a_n) dizisinde

$a_2 = 1$ ve $a_3 = 3$ olduğuna göre $a_6 + a_7$ toplamını bulunuz.

SORU

Bir (a_n) dizisinde $a_1 = 20$ ve $a_{n+1} = \frac{2 \cdot a_n}{n+1}$ ($n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$)

indirgeme bağıntısı veriliyor.

Buna göre bu dizinin 20 terimi kaçtır?

SORU

Genel terimi $a_n = \frac{(n^2-16)(3n+5)}{5n-9}$ olan dizinin hangi terimleri negatiftir?

Soru

Genel terimi $a_n = \frac{5n+3}{3n-2}$ olan dizinin $(2, 6)$ aralığındaki terimlerini bulunuz?

Soru:

$(a_n) = (-3n^2 + 10n - 5)$ dizisinin en büyük değeri kaçtır?

ARİTMETİK DİZİLER VE ÖZELLİKLERİ

Ardışık terimleri arasındaki farkın sabit olduğu dizilere **aritmetik dizi** denir.

(a_n) aritmetik dizisinde

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_{n+1} - a_n = d$ olacak şekilde bir **d** gerçektek sayı vardır.

Bu **d** sayısına **aritmetik dizinin ortak farkı** denir.

İlk terimi a_1 ve ortak farkı **d** olan bir (a_n) aritmetik dizisinin genel terimi

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

ile bulunur.

ÖZELLİK:

Bir aritmetik dizide $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $p < n$ ise

$$a_n = a_p + (n - p) \cdot d$$

olur.

ÖZELLİK:

Bir aritmetik dizinin n . terimi a_n , p . terimi a_p olmak üzere

bu dizinin ortak farkı

$$d = \frac{a_n - a_p}{n - p} \text{ ile bulunur.}$$

SORU

İlk terimi 4 ve ortak farkı 3 olan bir aritmetik dizinin 10. terimi kaçtır?

SORU

(a_n) bir aritmetik dizidir.

$$a_{20} = 119$$

$a_{15} = 89$ olduğuna göre a_9 değeri kaçtır?

ÖZELLİK:

Sonlu bir aritmetik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin toplamı birbirine eşittir.

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ dizisinde

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_k + a_{n-k+1} \text{ olur.}$$

ÖZELLİK:

Bir aritmetik dizide her terim kendisinden eşit uzaklıktaki terimlerin aritmetik ortalamasına eşittir.

$$k < p \text{ için } a_p = \frac{a_{p+k} + a_{p-k}}{2} \text{ olur.}$$

SORU

Terimleri birbirinden farklı ve ortak farkı r olan bir (a_n) bir aritmetik dizisi için

$$a_1 = 3r$$

$a_6 = a_2 \cdot a_4$ eşitlikleri veriliyor.

Buna göre a_{10} değeri kaçtır?

SORU

(a_n) bir aritmetik dizi olmak üzere

$a_2 + a_6 + a_{10} = 15$ olduğuna göre $a_1 + a_{11}$ toplamını bulunuz.

SORU

30 ile -24 sayıları arasına, bu sayılarla birlikte azalan bir aritmetik dizi oluşturacak şekilde 8 terim yerleştiriliyor.

Buna göre oluşan bu dizinin 6. terimini bulunuz.

BİR ARİTMETİK DİZİNİN İLK n TERİMİNİN TOPLAMI

Ortak farkı d olan bir aritmetik dizinin ilk n terim toplamı S_n ile gösterilirse

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1) \cdot d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ olur.}$$

SORU

İlk terimi 5 olan bir aritmetik dizinin ilk 30 teriminin toplamı

1020 olduğuna göre bu dizinin 5.terimini bulunuz.

SORU

9 kişilik bir öğrenci grubunda öğrencilerin ağırlıkları bir aritmetik dizi oluşturmaktadır.

En hafif öğrenci 50 kg dır.

Tüm öğrencilerin ağırlıkların toplamı 558 kg olduğuna göre en ağır öğrenci kaç kilogramdır?

GEOMETRİK DİZİLER VE ÖZELLİKLERİ

Ardışık terimleri arasındaki oran sabit olan dizilere **geometrik dizi** denir.

Bir (a_n) geometrik dizisinde $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ($a_n \neq 0$) ise r gerçekte sayısına (a_n) **geometrik dizisinin ortak çarpanı** denir.

İlk terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinin genel terimi

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ ile bulunur.

ÖZELLİK:

Ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinde $1 \leq k < n$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k} \text{ olur.}$$

ÖZELLİK:

Sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımı birbirine eşittir.

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ dizisinde

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \dots = a_k \cdot a_{n-k+1} \text{ olur.}$$

SORU

İlk terimi $a_1 = 2$ ve ortak çarpanı $r = \sqrt[3]{2}$ olan

bir (a_n) geometrik dizisinde $a_4 + a_7$ toplamının değeri kaçtır?

SORU

Pozitif terimli bir (a_n) geometrik dizisi için

$$\frac{a_4 a_6 a_8 a_{10}}{a_7 a_5} = 121 \text{ olduğuna göre } a_8 \text{ terimini bulunuz.}$$

Bütün terimleri pozitif ve ortak çarpanı r olan

bir (a_n) geometrik dizisi için

$$a_1 = \frac{1}{2} + r, \quad a_7 = a_5 + 12 \cdot a_3$$

buna göre a_8 kaçtır?

Bir Geometrik Dizinin İlk n Teriminin Toplamı

İlk terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \text{ olur.}$$

SORU

Pozitif terimli bir (a_n) geometrik dizisinde

$a_8 = 8$ ve $a_{11} = 64$ olduğuna göre bu dizinin

ilk 11 teriminin toplamını bulunuz.

SORU

Bir (a_n) geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı S_n dir.

$a_3 = 4$ ve $a_7 = 64$ olduğuna göre S_6 yı bulunuz.

FİBONACCI DİZİSİ

İlk iki terimi 1 ve bundan sonraki her terimi kendinden önceki iki teriminin toplamı olan diziye

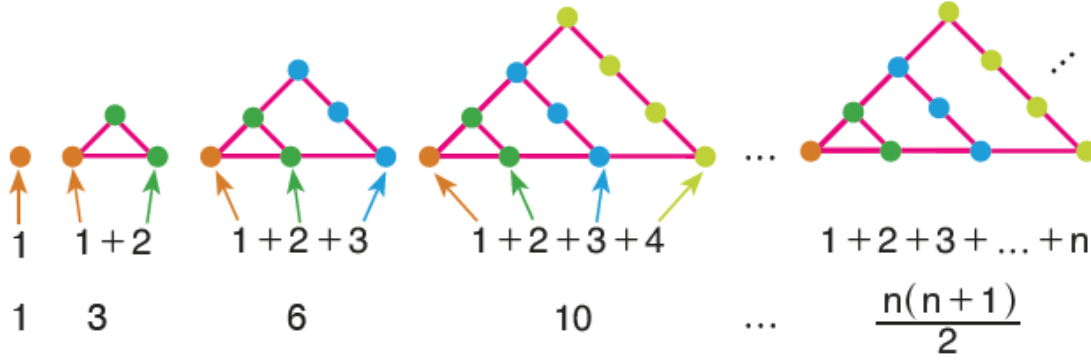
Fibonacci dizisi denir. $(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$ olur.

SORU

$(1, 1, 2, 3, 5, 8, a - b, 21, 34, a + b, 89, \dots)$

dizisi Fibonacci dizisi olduğuna göre $a.b$ çarpımı kaçtır?

ÖRNEK



1 den n ye kadar ardışık sayıların toplamı şeklinde yazılabilen sayılara

üçgensel sayılar denir. Bu sayılarla oluşturulmuş diziye ise **üçgensel sayı** dizisi denir.

$$1 = 1$$

$$3 = 1 + 2$$

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

⋮

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

üçgensel sayılarla oluşturulan dizi ise

$$(a_n) = \left(1, 3, 6, 10, 15, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \dots \right)$$

şeklinde olur.