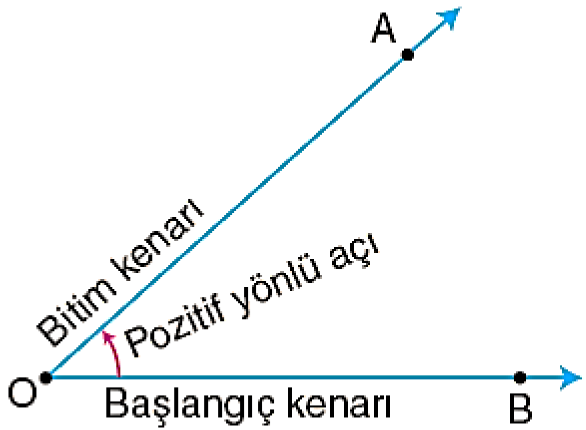
YÖNLÜ AÇILAR

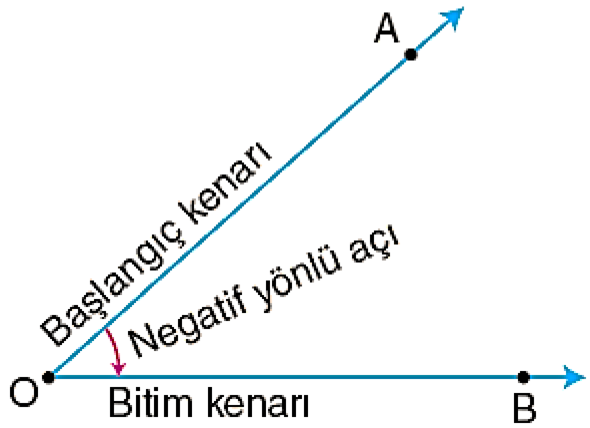
Başlangıç noktaları aynı olan iki ışından biri başlangıç kenarı, diğeri bitim kenarı olarak alındığında oluşan açıya **yönlü açı** adı verilir.

Saatin dönme yönünde olan açılar negatif yönlü; ters yönünde olan açılar pozitif yönlü açılardır.



Pozitif yönlü açı

$\widehat{BOA}$



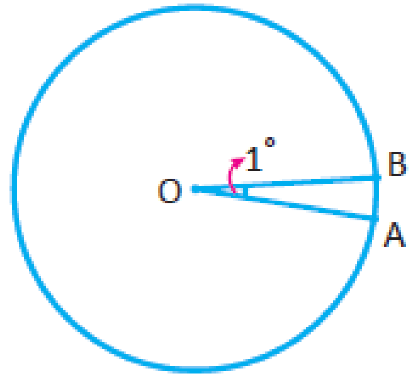
Negatif yönlü açı

$\widehat{AOB}$

AÇI ÖLÇÜ BİRİMLERİ

Açının kolları arasındaki açıklığı ölçmek için açı ölçü birimleri kullanılır. Bunlar derece ve radyandır.

Derece: Bir çember çevresi 360 eş parçaya bölündüğünde her bir yay parçasını gören merkez açının ölçüsüne **1 derece** denir. Derece (°) sembolü ile gösterilir. Dereceden de küçük açı ölçü birimleri vardır, bunlar dakika ve saniyedir.



1° nin $\frac{1}{60}$ ine bir dakika denir. 1’ sembolü ile gösterilir.

1’ nın $\frac{1}{60}$ ine bir saniye denir. 1’’ sembolü ile gösterilir.

$1° = 60' = 3600''$

Örnek: Ölçüsü 5° 20' 10" **olan açıyı saniye cinsinden bulunuz.**

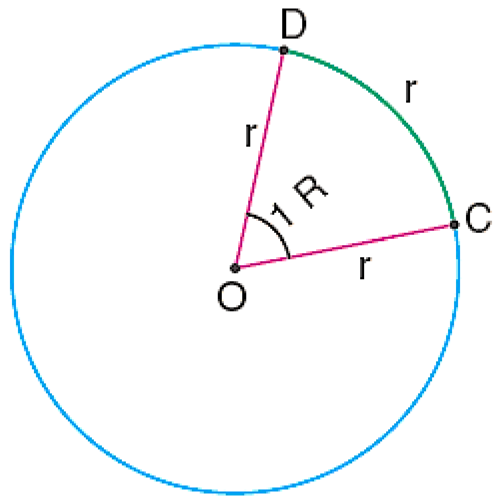
Radyan

Herhangi bir çemberde, yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsüne

bir radyan denir ve **1 R** ile gösterilir.

Çember yayı tam açı olduğundan ölçüsü 2π radyan, yarım çember yayının ölçüsü π radyandır.
Derece D, radyan R olmak üzere

$\frac{D}{360°} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow \frac{D}{180°} = \frac{R}{\pi}$ bağıntısı elde edilir.



Bu bağıntı ile derece radyana, radyanda dereceye çevrilir.

Örnek: $210°$ radyana , $\frac{11\pi}{6}$ dereceye çeviriniz.

ESAS ÖLÇÜ

$0° \leq \alpha < 360°$ ve $k \in Z$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k.360°$ olan açının esas ölçüsü α **derecedir.** Derece cinsinden verilen bir açının 360° ye bölümünden kalan, o açının esas ölçüsüdür.

Örnek:

2048° $ve\ -7260°$ açılarının esas ölçüsünü bulunuz.

ESAS ÖLÇÜ

$0 \leq \alpha < 2\pi$ ve $k \in Z$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k.2\pi$ olan açının esas ölçüsü α **radyandır.** Radyan cinsinden verilen bir açının 2π ye bölümünden kalan, o açının esas ölçüsüdür.

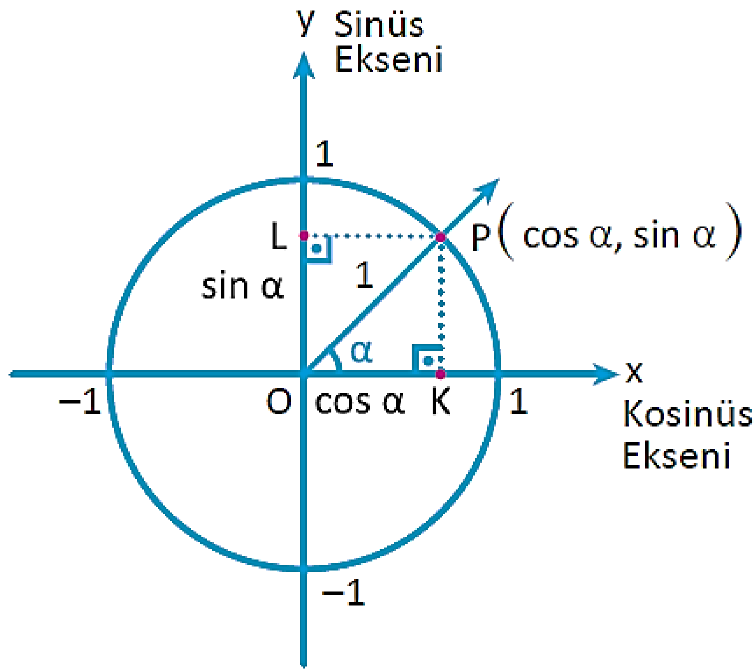
Örnek:

$\frac{118\pi}{7}$ ve $-\frac{69\pi}{5}$ açılarının esas ölçüsünü bulunuz?

Açının birimi ne olursa olsun esas ölçüsü daima pozitif yönlü açıdır.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

SİNÜS VE KOSİNÜS FONKSİYONLARI



Bir x gerçek sayısını cos x e dönüştüren

f fonksiyonuna **kosinüs fonksiyonu** denir.

$f:\mathbb{R}\rightarrow[-1,1]$; $f(x)$ = cos x şeklinde gösterilir.

Bir x gerçek sayısını sin x e dönüştüren

f fonksiyonuna **sinüs fonksiyonu** denir.

$f:\mathbb{R}\rightarrow[-1,1]$; $f(x)$ = sinx şeklinde gösterilir.

k$\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\alpha+k.2\pi$ olan açıların esas ölçüsü α olduğundan

$\sin(\alpha+k.2\pi)=\sin\alpha$ ve $\cos(\alpha+k.2\pi)=\cos\alpha$

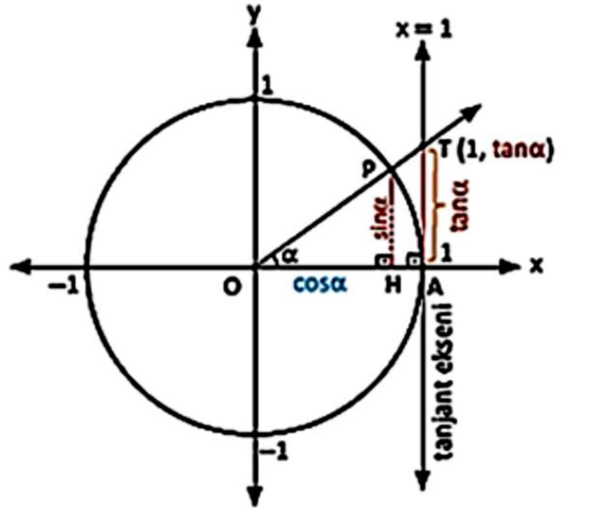
$|OK|=\cos\alpha$, $|KP|=\sin\alpha$ olduğundan pisagor teoreminden $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ olur.

P noktası birim çember üzerinde olduğundan -1$\leq\sin\alpha\leq1$;$-1\leq\cos\alpha\leq1$

TANJANT FONKSİYONU

$f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k.\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \tan x$
biçiminde tanımlanan fonksiyona **tanjant fonksiyonu** denir.

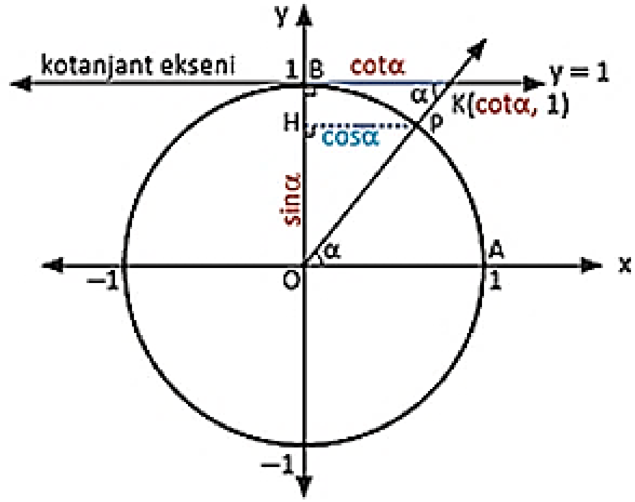
- x= 1 doğrusu birim çembere A noktasında teğettir.$[OP]$ nın $x = 1$ doğrusunu kestiği T noktasının ordinatı $(|AT|)$, α reel sayısının tanjantıdır ve $\tan \alpha$ ile gösterilir.
- x= 1 doğrusuna tanjant ekseni denir.
- Üçgen benzerliğinden $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$



KOTANJANT FONKSİYONU

$g: \mathbb{R} - \{k.\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cot x$

biçiminde tanımlanan fonksiyona **kotanjant fonksiyonu** denir.



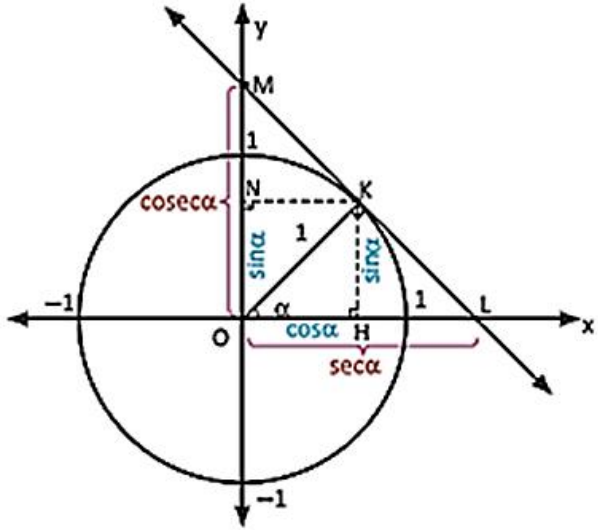
- y= 1 doğrusu birim çembere B noktasında teğettir. $[OP]$ nın y= 1 doğrusunu kestiği K noktasını apsisi $(|BK|)$, α reel sayısının **kotanjantıdır** ve $\boldsymbol{cot\ \alpha}$ ile gösterilir.
- Üçgen benzerliğinden $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- y= 1 doğrusuna **kotanjant ekseni** denir.

- k$\in \mathbb{Z}$ ve $\alpha \neq \frac{\pi}{2}.k$ olmak üzere $\tan\alpha$. $\cot\alpha = 1$

SEKANT FONKSİYONU

f: $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\rightarrow\mathbb{R}-(-1,1)$,

f(x) = secx şeklinde tanımlanan fonksiyona s**ekant fonksiyonu** denir.



- m(HOK)=α olmak üzere birim çember üzerindeki K noktasından çizilen teğetin x eksenini kestiği L noktasının apsisine $\boldsymbol{\alpha}$ **açısının sekantı** denir ve bu ifade **sec**$\boldsymbol{\alpha}$ ile gösterilir. $|OL|$=sec α olur.

- Birim çemberde KOH ile LOK üçgenlerinde benzerlik oranları kullanılarak

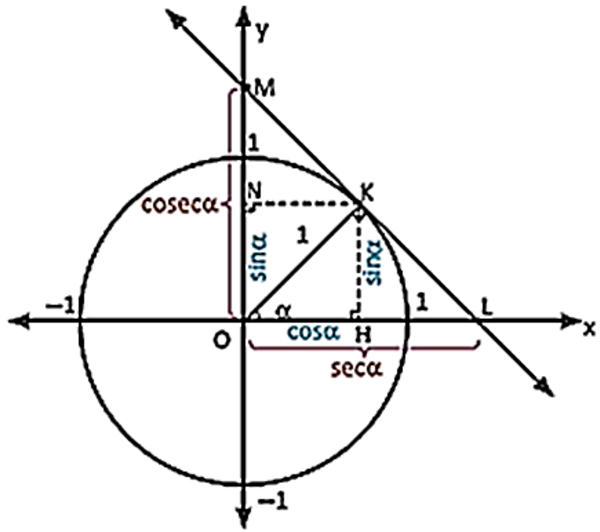
sec$\boldsymbol{\alpha}$**=**$\boldsymbol{\frac{1}{cos\alpha}}$ olarak bulunur.

KOSEKANT FONKSİYONU

$$g:\mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\rightarrow \mathbb{R}-(-1.1),\ \ g(x)=\text{cosecx}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **kosekant fonksiyonu** denir.

- K noktasından çizilen teğetin y eksenini kestiği M noktasının ordinatına α açısının kosekantı denir ve bu ifade cosecα ile gösterilir. $|OM|$= cosecα olur.



- KON ile MOK üçgenlerinin benzerliğinden **cosec$\boldsymbol{\alpha}$=** $\boldsymbol{\frac{1}{sin\alpha}}$ elde edilir.

SORU 2019/AYT

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ **olmak üzere** $\sec x . \tan x . (1 - \sin x) = \frac{1}{4}$ **olduğuna göre** $\csc x = ?$

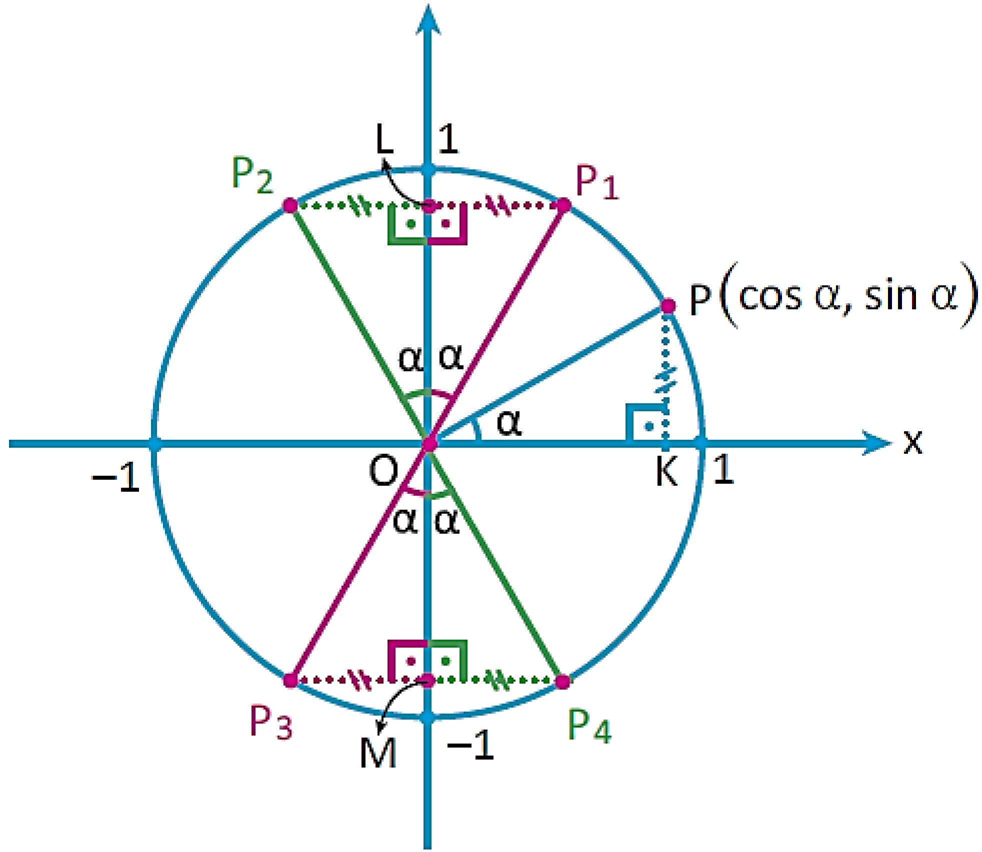
$\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ ŞEKLİNDEKİ AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI

1. k nin Tek Tamsayı Olması Hâli

Herhangi bir açının trigonometrik değeri dar açı cinsinden yazılırken;

$90°(\frac{\pi}{2})$ veya $270°(\frac{3\pi}{2})$ kullanılırsa trigonometrik fonksiyon isim değiştirir.

Kısacası y eksenine isim değiştiren eksen de diyebiliriz.



2. k nin Çift Tamsayı Olması Hâli

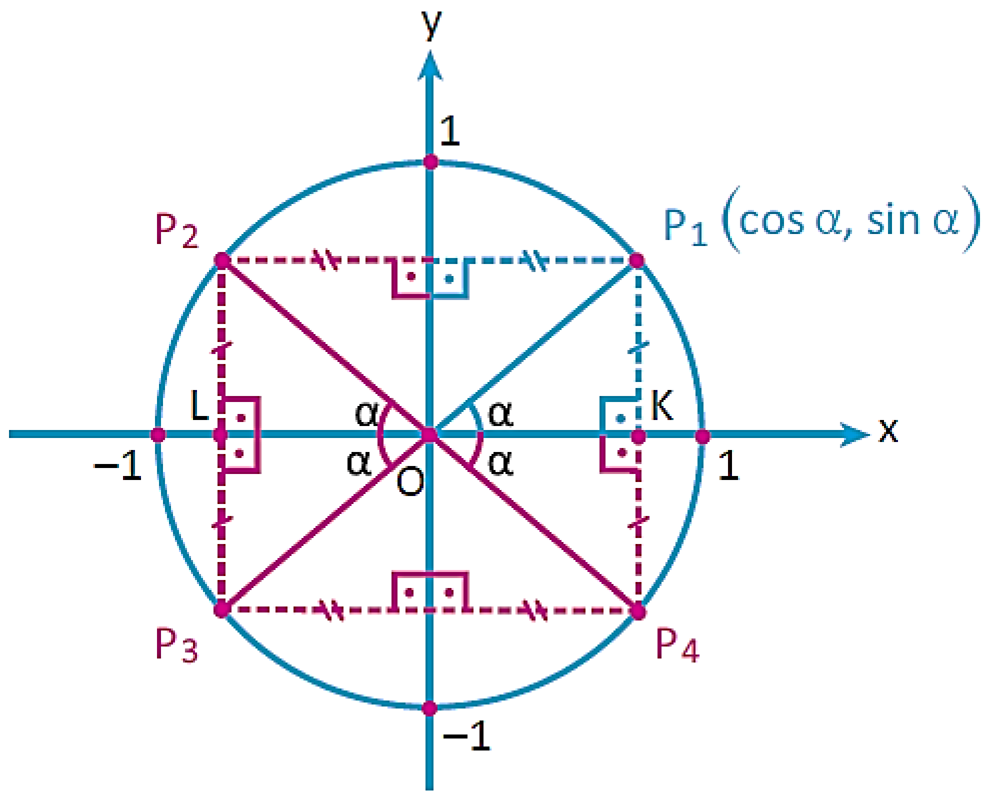
Herhangi bir açının trigonometrik değeri dar açı cinsinden yazılırken;

$180°(\pi)$ veya $360°(2\pi)$ kullanılırsa

trigonometrik fonksiyon isim değiştirmez.

Kısacası x eksenine isim değiştirmeyen

eksende diyebiliriz.



Kosinüs İçin Toplam ve Fark Formülleri:

a ve b gibi iki açının toplamının ve farkının kosinüsü

cos(a+b)=cosa.cosb - sina.sinb

cos(a-b)=cosa.cosb + sina.sinb

Örnek: $\cos 75°$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

Sinüs İçin Toplam ve Fark Formülleri:

a ve b gibi iki açının toplamının ve farkının sinüsü

sin(a+b)=sina.cosb + sinb.cosa

sin(a-b)=sina.cosb - sinb.coşa

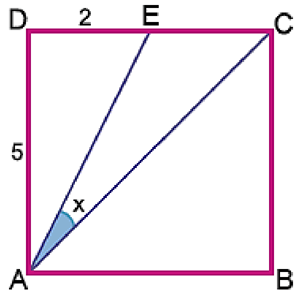
Örnek: $\sin 15°$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

Tanjant Toplam ve Fark Formülleri:

a ve b gibi iki açının toplamının ve farkının tanjantı:

tan(a+b)=$\frac{\text{tana+tanb}}{1-\text{tana.tanb}}$; tan(a-b)=$\frac{\text{tana}-\text{tanb}}{1+\text{tana.tanb}}$

Örnek:



ABCD bir kare m$\left(\widehat{EAC}\right) = x$

$|AD| = 5\ cm$, $|DE| = 2$ cm

olduğuna göre $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ değeri kaçtır?

SİNÜS İKİ KAT AÇI FORMÜLÜ

$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$

toplam formülünde b$=$ a alınırsa

$\sin(a+a) = \sin a \cdot \cos a + \cos a \cdot \sin a$

$\mathbf{\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a}$

biçiminde **iki kat açı formülü** elde edilir.

Örnek:

$\frac{\sin 48°}{\sin 16°} - \frac{\sin 42°}{\cos 16°}$

ifadesinin değeri kaçtır?

KOSİNÜS İKİ KAT AÇI FORMÜLLERİ

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

formülünde b yerine a yazılırsa

$\mathbf{\cos 2a = \boldsymbol{\cos^2 a} - \boldsymbol{\sin^2} a}$ formülü elde edilir.

Bu formülde, $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ eşitliğinden yararlanarak

$\sin^2 a$ yerine $1 - \cos^2 a$ yazarak

$\mathbf{\cos 2a = 2\boldsymbol{\cos^2} a - 1}$ formülünü

ve $\cos^2 a$ yerine $1 - \sin^2 a$ yazarak

$\mathbf{\cos 2a = 1 - 2\boldsymbol{\sin^2} a}$ formülünü oluştururuz.

SORU

$0 < x < 90$ **ve** $\dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sin 2x} = 3$

olduğuna göre $\cos 2x$ **değeri kaçtır?**

TANJANT VE KOTANJANT İÇİN İKİ KAT AÇI FORMÜLLERİ

- $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

- $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$

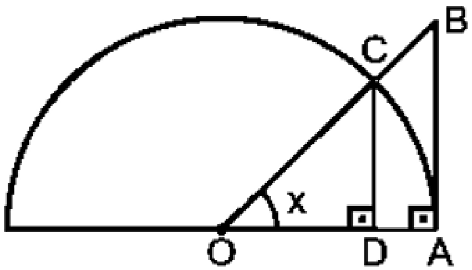
Örnek:

$\tan x = \dfrac{4}{3}$

olduğuna göre $\sin 2x$ **değerini bulunuz.**

2018-AYT

Aşağıda, O merkezli yarıçapı 1 birim olan yarım çember ile OAB ve ODC dik üçgenleri gösterilmiştir. A ve C noktaları hem OAB üçgeninin hem de yarım çemberin üzerindedir.



Buna göre,

$$\frac{|AB| + |BC|}{|CD| + |DA|}$$

oranının x türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) sin x B) tan x C) cot x

D) csc x E) sec x

2012-LYS1

$$x^2-(\sin a)x-\frac{1}{4}\left(\cos^2 a\right)=0$$

denkleminin bir kökü $\frac{2}{3}$ 'tür.

Buna göre, $\sin a$ kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

2010-LYS1

$$\frac{(\sin x - \cos x)^2}{\cos x} + 2\sin x$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{\cos x}$ B) $\frac{1}{\sin x}$ C) 1

D) $\arcsin x$ E) $\arccos x$

2019-AYT

a$\in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right)$ **olmak üzere,**

$x = \sin(3a)$

$y = \cos(3a)$

$z = \tan(3a)$

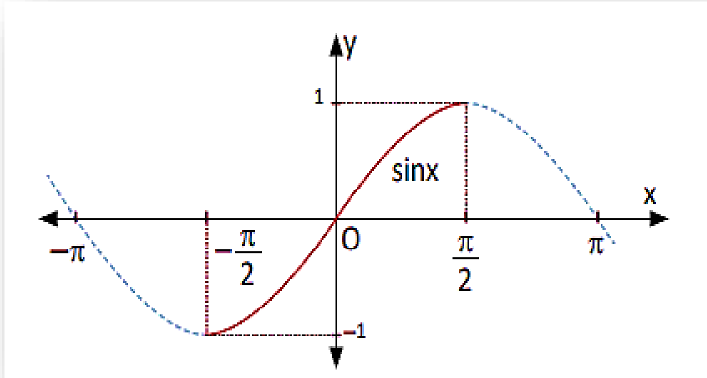
sayılarının doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x < y < z$ B) $x < z < y$ C) $y < x < z$

D) $y < z < x$ E) $z < x < y$

$f(x) = \sin x$ FONKSİYONUNUN TERSİ

$\sin x$ fonksiyonunun tanım kümesi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olarak alındığında bu aralıkta fonksiyon bire bir ve örten olur.



$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$$

olarak tanımlandığında

$$f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ f^{-1}(x) = \arcsin x$$

fonksiyonuna **sinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu** denir.

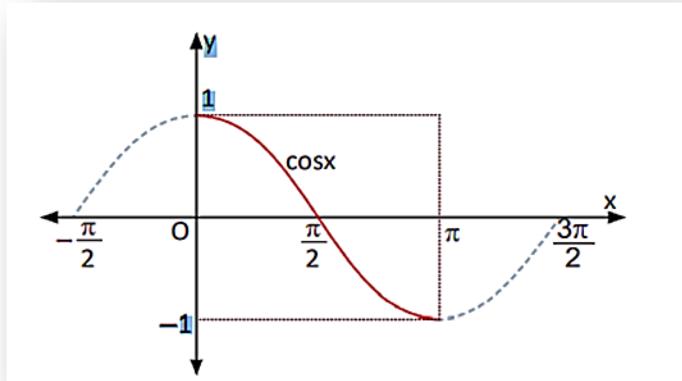
$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$ olur.

$$\sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1,1]$$

$$\arcsin(\sin y) = y,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$g(x) =$ cosx FONKSİYONUNUN TERSİ

cosx fonksiyonunun tanım kümesi $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ olarak alındığında bu aralıkta fonksiyon bire bir ve örten olur



g: $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}] \rightarrow [-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) =$ **cosx**

olarak tanımlandığında

$\boldsymbol{g}^{-\mathbf{1}}: [-\mathbf{1}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$, $\boldsymbol{g}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}) =$ **arccosx**

fonksiyonuna **cosinüs fonksiyonunun**

ters fonksiyonu denir.

$\boldsymbol{y} =$ **arccosx** $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} =$ **cosy**
cos(**arccos**$\boldsymbol{x}$) $= \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{-1,1}]$
arccos(**cos**$\boldsymbol{y}$) $= \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$

SORU

Aşağıdaki ifadelerin değerleri sırasıyla kaçtır?

I. $\arccos 0$ II. $\arccos 1$ III. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ IV. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

SORU

Aşağıdaki ifadelerin değerleri sırasıyla kaçtır?

I. $\arcsin 0$ II. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ III. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ IV. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$h(x) =$ tanx FONKSİYONUNUN TERSİ

tanx fonksiyonu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nda bire bir ve örtendir.

$h: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ **,** $h(x) =$ **tanx**

olarak tanımlandığında

$h^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $h^{-1}(x) =$ **arctanx**

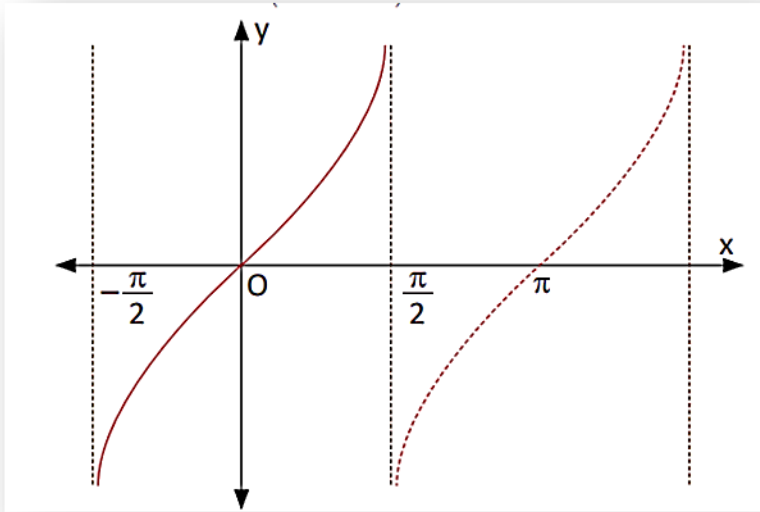
fonksiyonuna **tanjant fonksiyonunun**

ters fonksiyonu denir.

$y =$ **arctanx** $\Leftrightarrow x =$ **tany** olur.

tan$($**arctan**$x) = x, x \in \mathbb{R}$

arctan$($**tan**$y) = y, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



SORU

$\tan\left(arc\sin\frac{12}{13}+\frac{\pi}{2}\right)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

SORU

$\arctan 1 = ?$

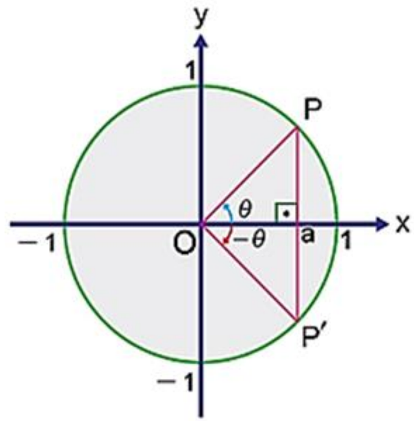
$\arctan\left(-\sqrt{3}\right) = ?$

$\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = ?$

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

$\mathbf{cosx} = \boldsymbol{a}$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜM KÜMESİ

$-1 \leq a \leq 1$ olmak üzere $\cos x = a$ denkleminin $[0,2\pi)$ nda bir kökü θ ise denklemin çözüm kümesi ;
Ç = $\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{2k\pi} \vee \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{2k\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\}$ olur.



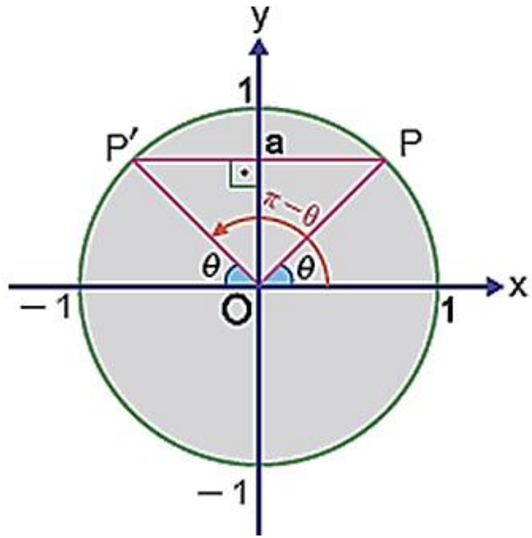
$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Sonuç:
$\mathbf{cosf}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{cosg}(\boldsymbol{x})$ denkleminin çözüm kümesi
$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{2k\pi}$ **veya**
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{2k\pi}$ denklemlerini sağlayan x değerleridir.

sinx $= \boldsymbol{a}$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜM KÜMESİ

$-1 \leq a \ \leq 1$ olmak üzere $\sin x = a$ denkleminin [0,2π) nda bir kökü θ ise denklemin çözüm kümesi ;

Ç = $\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{2k\pi} \vee \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{2k\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z} \}$ olur.



$\sin x = -\frac{1}{2}$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Sonuç:

sinf$(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sin}\ \boldsymbol{g}\ (\boldsymbol{x})$ denkleminin çözüm kümesi $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) +$ **2kπ veya**$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) +$ **2kπ**

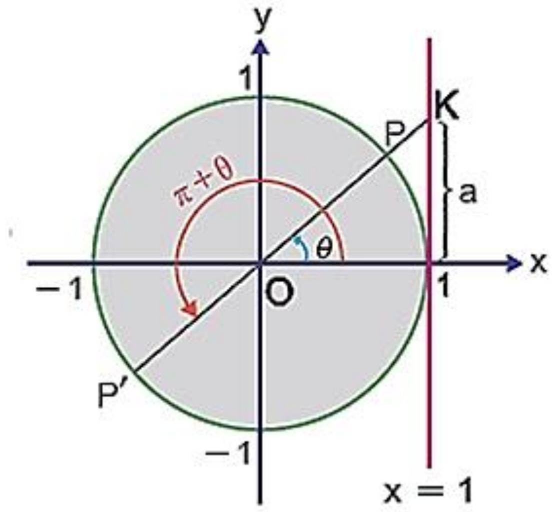
denklemlerini sağlayan x değerleridir.

$\tan x = a$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜM KÜMESİ

a∈ $\mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbf{tan x} = \boldsymbol{a}$ denkleminin $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi})$ nda bir kökü

$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta} \neq \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}})$ ise denklemin çözüm kümesi

Ç= $\{x \mid x = \theta + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$ olur.



$\tan \boldsymbol{x} = -\mathbf{1}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Sonuç:

$\mathbf{tan}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{tan}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ denkleminin çözüm kümesi k∈ $\mathbb{Z}$ olmak üzere

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\pi}$denklemini sağlayan $\boldsymbol{x}$ değerleridir.

SORU 2018/AYT

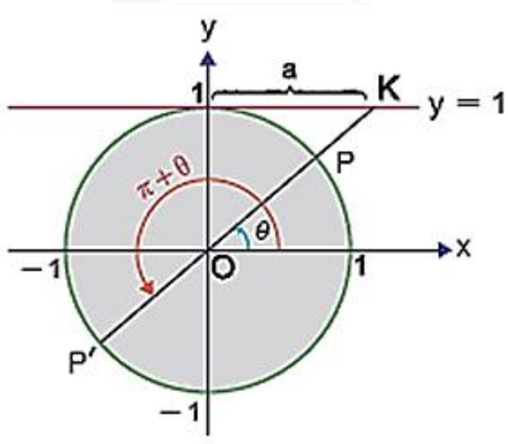
$0 < x < \pi$ olmak üzere $\dfrac{\sin x . \cos x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{\sin x - \cos x}{2}$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

$\cot x = \boldsymbol{a}$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜM KÜMESİ

a$\in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbf{cot x} = \boldsymbol{a}$ denkleminin $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi})$ nda bir kökü $\boldsymbol{\theta}$ ise denklemin çözüm kümesi

Ç$= \{x \mid x = \theta + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$ olur.



$\cot x = \sqrt{3}$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Sonuç :

$\boldsymbol{cot\, f\,(x) = cot\, g\,(x)}$ denkleminin çözüm kümesi k$\in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$\boldsymbol{f(x) = g(x) + k \cdot \pi}$denklemini sağlayan $\boldsymbol{x}$ değerleridir.