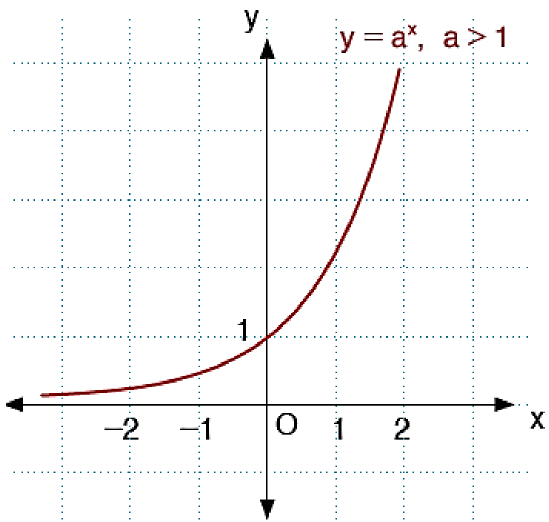
ÜSTEL FONKSİYON

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+;\ f(x) = a^x$ fonksiyonuna, tabanı "a" olan **üstel fonksiyon** denir. x bağımsız değişken. Bir değişken üs olduğunda üsteki küçük bir değişiklik fonksiyonun değerinde belirgin bir farklılığa neden olmaktadır.

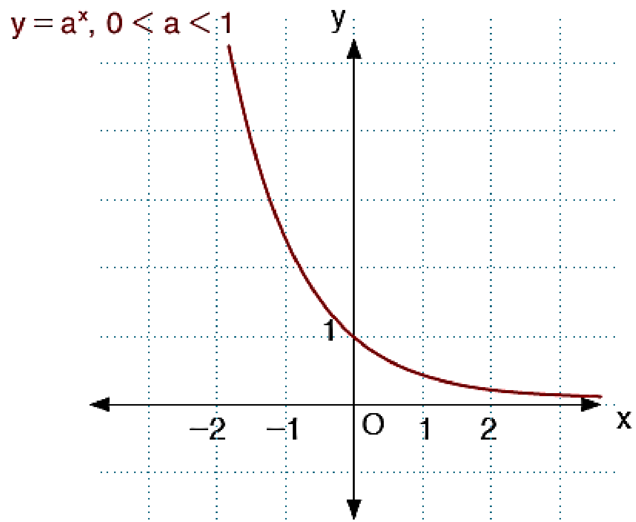
Üstel fonksiyon

- $a > 1$ için artan
- $0 < a < 1$ için azalan

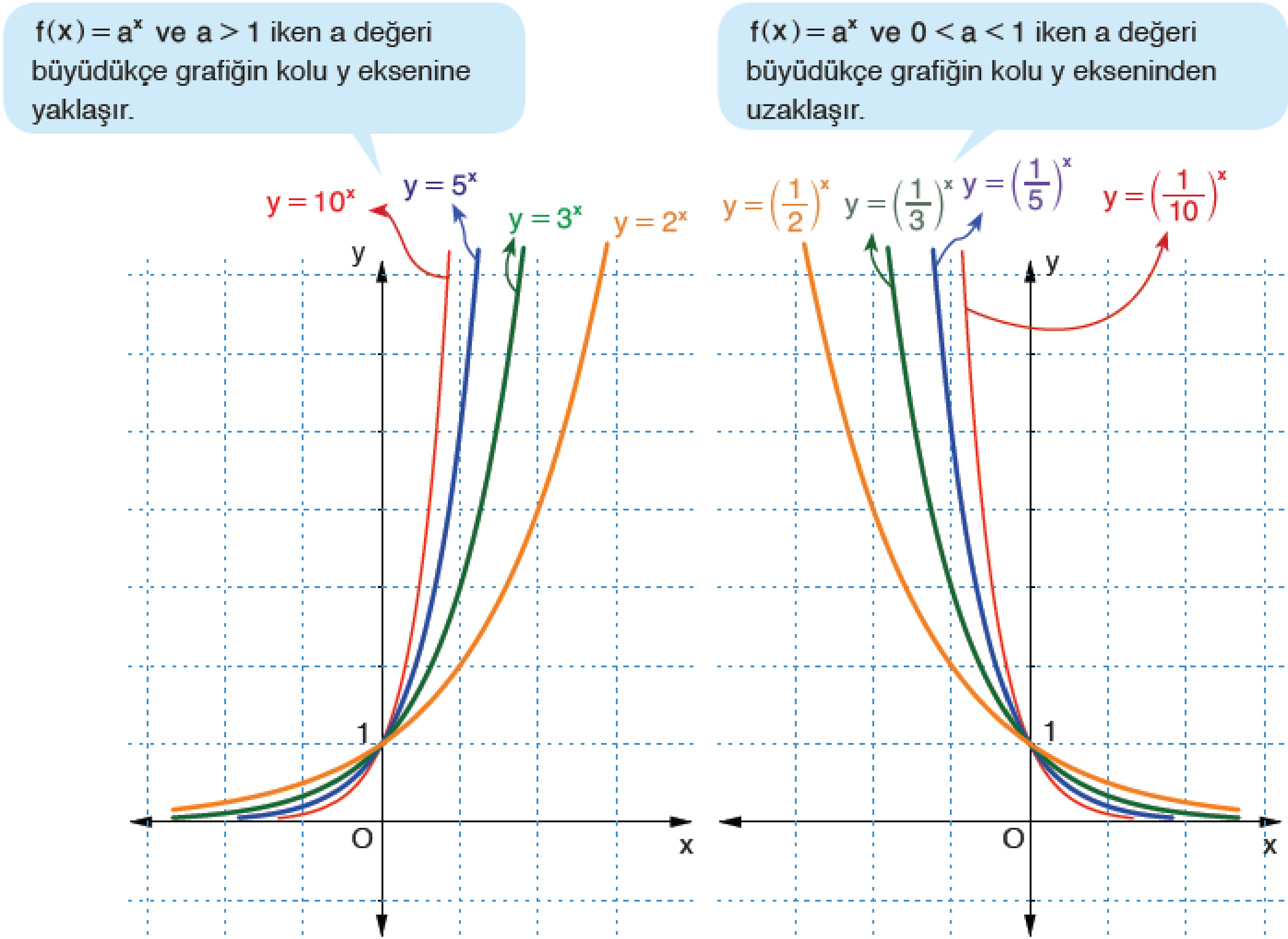
fonksiyon olur.



Artan fonksiyon



Azalan fonksiyon



f(x) = a^x ve a > 1 iken a değeri büyüdükçe grafiğin kolu y eksenine yaklaşır.
f(x) = a^x ve 0 < a < 1 iken a değeri büyüdükçe grafiğin kolu y ekseninden uzaklaşır.
y = 10^x
y = 5^x
y = 3^x
y = 2^x
y = (1/2)^x
y = (1/3)^x
y = (1/5)^x
y = (1/10)^x
y
x
O
1

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonlardan hangilerinin üstel fonksiyon olduğunu bulunuz.

a) $f(x) = 3x^{-5}$ b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $h(x) = (-5)^{-x}$

d) $s(x) = 5^n$

Örnek:

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = (4m - 12)^x$ **fonksiyonu üstel bir fonksiyon olduğuna göre m nin alabileceği <u>en geniş</u> değer aralığını bulunuz.**

Örnek: $f(x) = (4n - 7)^x$ **üstel fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğuna göre**

$\mathbf{2n + 5}$ **ifadesinin <u>en küçük</u> tam sayı değeri kaçtır?**

LOGARİTMA FONKSİYONU

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, a > 0\ ve\ a \neq 1\ olacak\ şekilde\ f(x) = a^x$ (1-1 ve örten) üstel fonksiyonunun tersine a tabanına göre **logaritma fonksiyonu** denir.

$f^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_a x$ şeklinde gösterilir.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ için $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

Örnek: Logaritmik biçimde verilen ifadeleri üstel biçimde yazınız.

a) $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$

b) $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$

Örnek: Üstel biçimde verilen ifadeleri logaritmik biçimde yazınız.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = 243$

b) $2^{-3} = \left(\frac{1}{8}\right)$

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonların terslerinin kuralını bulunuz.

a) $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}\,;\, f(x) = 3 - 2\log_5(x-1)$

b) $g\colon \mathbb{R} \to (5,\infty)\,;\, g(x) = e^{3x-1} + 5$

EN GENİŞ TANIM KÜMESİ

$f(x) = \log_{g(x)} h(x)$fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için

I. $g(x) > 0$

II. $g(x) \neq 1$

III. $h(x) > 0$

şartlarını sağlaması gerekir.

Örnek:

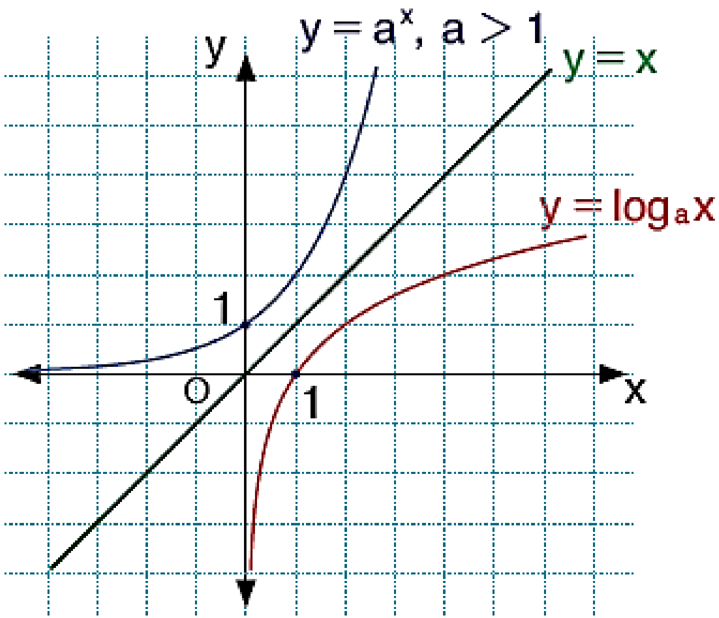
$\boldsymbol{f(x) = \log_{x+1}\left(\frac{x^2+x-6}{x-4}\right)}$ **fonksiyonunun <u>en geniş</u> tanım kümesini bulunuz.**

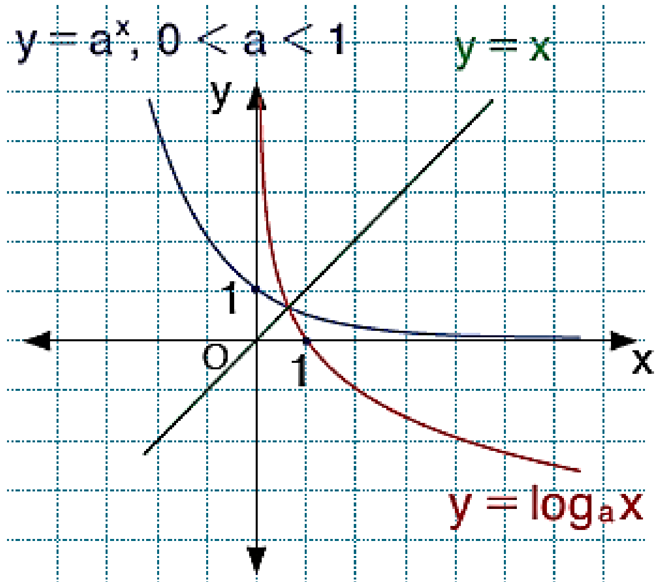
Örnek:

$f(x) = \log_2(x^2 + ax + 4)$ **fonksiyonu** $\forall x \in \mathbb{R}$ **için tanımlı olduğuna göre a nın değer aralığını bulunuz.**

Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

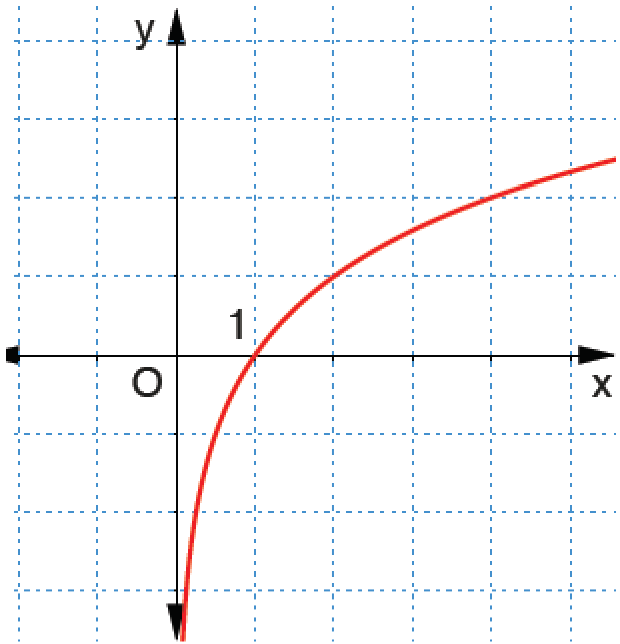
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, f$(x) = a^x$, fonksiyonunun grafiğinin tersi $y = x$ doğrusuna göre simetriği $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ fonksiyonudur.





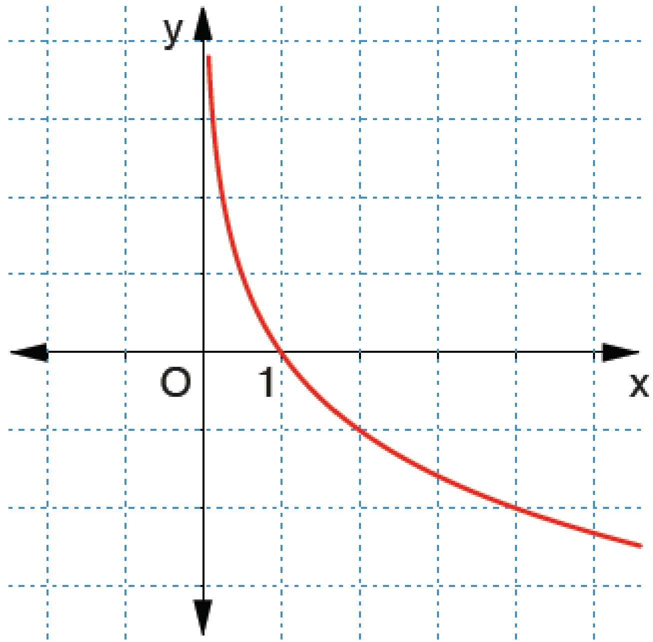
$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ Olmak üzere f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonuna $a > 1$ için **artan fonksiyon**, $0 < a < 1$ için **azalan fonksiyon** denir.

Bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibidir.



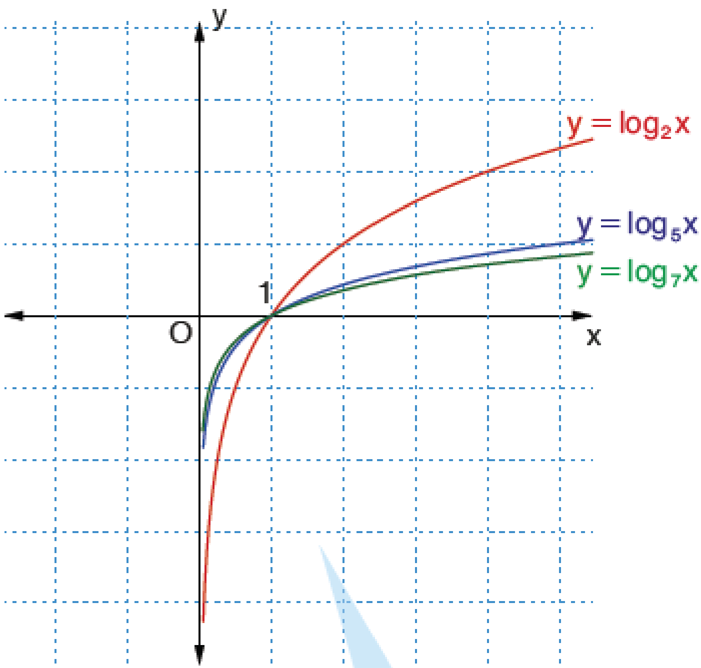
$a > 1 \Rightarrow y = \log_a x$

Artan fonksiyon

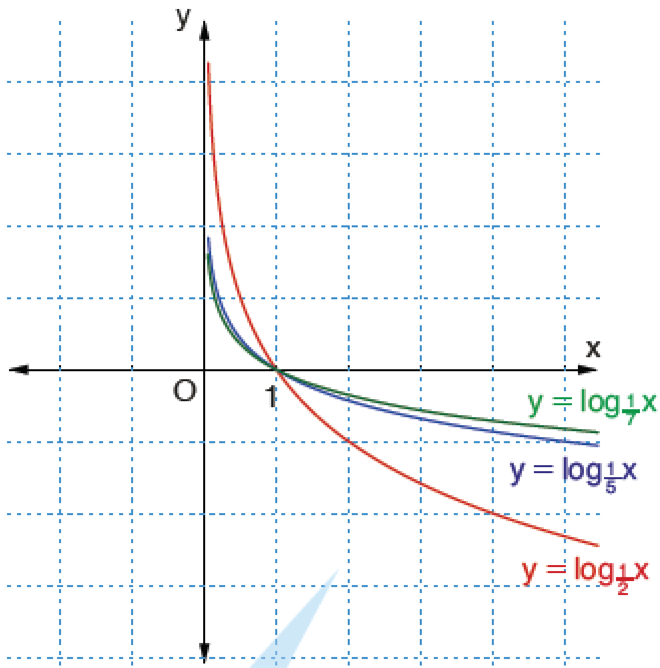


$0 < a < 1 \Rightarrow y = \log_a x$

Azalan fonksiyon



$y = \log_a x$ ve $a > 1$ iken taban arttıkça grafiğin kolu x eksenine yaklaşır.



$y = \log_a x$ ve $0 < a < 1$ iken taban arttıkça grafiğin kolu x ekseninden uzaklaşır.

10 TABANINDA LOGARİTMA FONKSİYONU

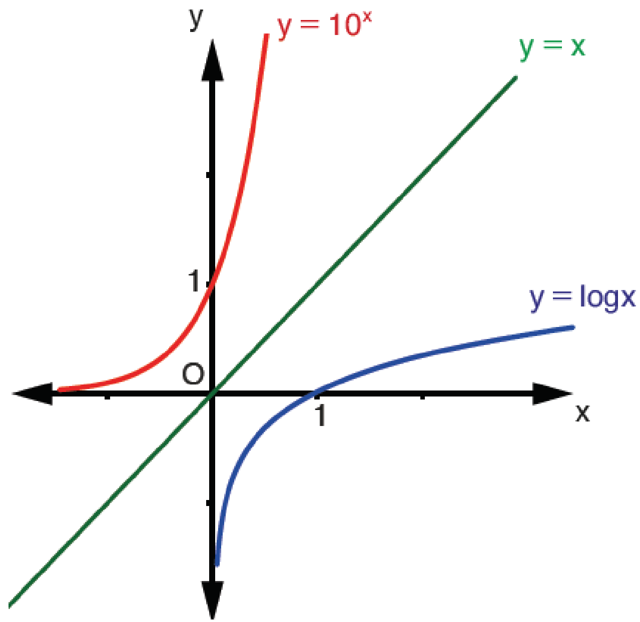
Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna **onluk logaritma fonksiyonu** veya **bayağı logaritma fonksiyonu** denir.

f:$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f(x) = log_{10}\, x}$ **veya** $\boldsymbol{f(x) = log\, x}$ biçiminde gösterilir.

Örnek: Logaritmik ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\log \mathbf{100000}$

b) $\log \mathbf{0,0001}$



$y = \log x$ fonksiyonu artan bir fonksiyondur.

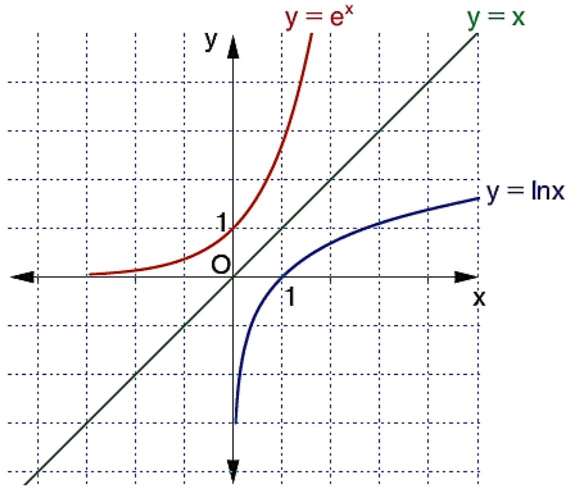
DOĞAL LOGARİTMA FONKSİYONU

Tabanı **e** irrasyonel sayısı olan logaritma fonksiyonuna **doğal logaritma fonksiyonu** denir.

f:$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{log_e\, x}$ veya $\boldsymbol{f(x) = ln\, x}$ biçiminde gösterilir .

$\boldsymbol{y = ln\, x \Leftrightarrow x = e^y}$ olur.

e = 2,718281828459... şeklinde bir irrasyonel sayıdır.



$y = \ln x$ **fonksiyonu artan bir fonksiyondur.**

LOGARİTMA FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ

1) $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $\log_a a = 1$ ve $\log_a 1 = 0$ $olur$.

2) $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$

3) $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ $olur$.

4) $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\log_a x^n = n.\log_a x$ olur.

5) $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, $x \in \mathbb{R}^+$,m,n $\in \mathbb{R}$ ve $n \neq 0$ olmak üzere $\boldsymbol{log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} log_a x}$ olur.

6) b$\in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve a,c $\in \mathbb{R}^+$olmak üzere $\boldsymbol{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}}$ olur.

SONUÇ: a$\in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\boldsymbol{a^{\log_a b} = b^{\log_a a} = b^1 = b}$ olur.

7) $a, c \in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$ **ve** b $\in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ **olur.**

Bu özelliğe **taban değiştirme özelliği** denir.

SONUÇ

a, b,c,d,....,m $\in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$,b$\in \mathbb{R}^{+}$ ve n$\in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere

$$\boldsymbol{log_a b = \frac{log_b b}{log_b a} = \frac{1}{log_b a}}$$

$$\boldsymbol{log_a b = \frac{log\, b}{log\, a}}$$

$$\boldsymbol{log_a b \cdot log_b c \cdot log_c d \cdot \ldots \cdot log_m n = \frac{log\, n}{log\, a} = log_a n}$$

elde edilir.

SORU: Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

a) $\log_{32}\sqrt{2} + \log_{\sqrt{2}} 32$

b) $3\log_{27} 81 - \log_{81} 243$

c)$\log_x y = 2$ **olduğuna göre**

$\log_{\sqrt[3]{x}} y^4 + \log_{\sqrt{x}} y^2 + \log_{\frac{1}{x}} \sqrt[3]{y}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

SORU

$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ **olmak üzere** $f(x) = \log_2 3.\log_3 5.\log_5(3x-1)$

olduğuna göre $f(3)$ **değeri kaçtır?**

SORU

$\dfrac{3}{\log_2 120} + \dfrac{1}{\log_3 120} + \dfrac{1}{\log_5 120}$ **ifadesini hesaplayınız.**

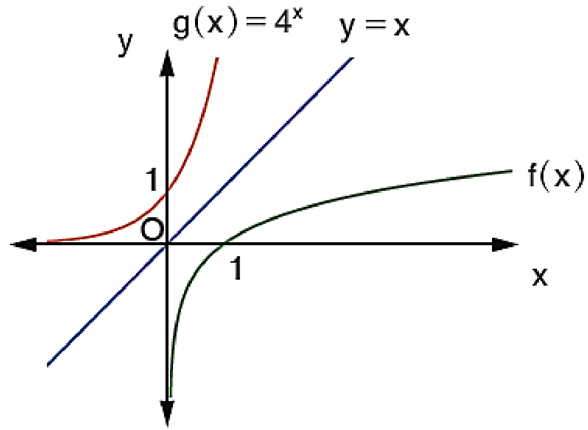
Örnek 1: $5^{\log_{\sqrt{5}} 3} - 2^{\log_8 125}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

Örnek 2: $\log 9 = x$ **ve** $\log 4 = y$ **olmak üzere**

$\log_6 135$ **ifadesinin x ve y türünden eşitini bulunuz.**

Örnek: Şekilde grafikleri verilen $g(x) = 4^x$ eğrisi ile $f(x)$ eğrisi $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

Buna göre $f(64)$ değerini bulunuz.



Örnek: $\log 5 \cong 0{,}699$ **olduğuna göre $\log 160$ ifadesinin yaklaşık değerini bulunuz.**

SORU: **Aşağıdaki ifadelerin hangi ardışık tamsayılar arasında olduğunu bulunuz.**

a) $\log 3$

b) $\log 83$

c) $\log 0{,}005$

d) $\log e$

NOT:

- 10 un kuvveti olmayan bir gerçek sayının 10 tabanına göre logaritması ardışık iki tam sayı arasındadır.
- $\log_a x$ ifadesinin değeri bulunurken x sayısı $a^n < x < a^{n+1}$ aralığında olacak biçimde anın tam sayı kuvvetleri belirlenir.

ÜSTEL DENKLEMLER

Tabanı 1 den farklı pozitif gerçek sayı olan ve bilinmeyenin üs olarak bulunduğu denklemlere **üstel denklemler** denir.

- Bu tür denklemlerin çözüm kümelerinin bulunmasında üslü ifadelerin veya logaritmik fonksiyonların özellikleri kullanılır.

Örnek: $2^{2x} - 11.2^{x} + 24 = 0$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

LOGARİTMİK DENKLEMLER

İçinde bilinmeyenin logaritmasını bulunduran denklemlere **logaritmik denklemler** denir.

- Bu tür denklemlerin çözüm kümelerinin bulunmasında logaritma fonksiyonunun özelliklerinden yararlanılır.

- Logaritmik denklemlerde logaritması alınan ifadelerin pozitif olması şartının yanı sıra taban x e bağlı bir fonksiyon ise tabanın da pozitif ve 1 den farklı olması şartı aranır.

- Bulunan x değerlerinin bu şartları sağlamasına göre çözüm kümesi oluşturulur.

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^+ - \{\mathbf{1}\}$ ve b$\in \mathbb{R}$ olmak üzere

$log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b \qquad (f(x) > 0)$

$log_a f(x) = log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \qquad (f(x) > 0, g(x) > 0)$

$log_{f(x)} g(x) = b \Leftrightarrow g(x) = (f(x))^b$

SORU **Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.**

a) $(\log_2 x)^2 - \log_2(x^2) - 8 = 0$

b) $5^{\log_2 x} + 25^{\log_2 \sqrt{x}} + x^{\log_2 5} = 15$

ÜSTEL EŞİTSİZLİKLER

Üstel eşitsizliklerde $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ için

$a > 1$ ise $f(x) \geq g(x)$ olur.

$0 < a < 1$ ise $f(x) \leq g(x)$ olur.

Örnek: Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $e^{x^2-3x} < e^4$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+3x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{x+8}$

c) $e^{3x} < 2$

LOGARİTMİK EŞİTSİZLİKLER :

Logaritmik eşitsizliklerde $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ için

$a > 1$ise $f(x) \leq g(x)$olur.

$0 < a < 1$ise $f(x) \geq g(x)$ olur.

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmalıdır.

Örnek:$\log_2(x^2 - 6x) - \log_2(1 - x) < 3$ **eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz**.

SORU : $\ln(2x+3) < \ln(x+5) + \ln(x-1)$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

SORU 2020/AYT

Bir çubuk eşit uzunlukta 4 parçaya bölündüğünde her bir parçanın uzunluğu $\log_5(x)$ birim, eşit uzunlukta 10 parçaya bölündüğünde her parçasının uzunluğu $\log_5\left(\frac{x^2}{25}\right)$ birim olmaktadır.

Buna göre çubuğun uzunluğu kaç birimdir?

SORU:
2020/AYT

n bir tamsayı ve $1 < n < 100$ olmak üzere $\log_2(\log_3 n)$ ifadesinin değeri bir pozitif

tam sayıya eşittir.

Buna göre n sayısının alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

SORU 2020/AYT

a ve b, 1 den farklı pozitif gerçel sayılar olmak üzere

$\log_2 a < 0 < \log_2 b$ eşitsizliği sağlanmaktadır.

Buna göre

I. $a + b > 1$

II. $b - a > 0$

III. $a.b > 1$

ifadelerinden hangileri her zaman doğrudur?