OLASILIK

Olasılık, günlük yaşamın birçok alanında sıkça kullanılır.

- Meteorolojik hava tahminleri,
- Ekonomik verilerin gerçekleşme durumu,
- Millî savunma,
- Temel bilimler,
- Sağlık,
- ...

Pek çok olay olasılık kavramı yardımıyla tahmin edilmeye çalışılır.

Olasılık, bir olayla ilgili gerçekleşmelerden yararlanarak gelecekte karşılaşılması muhtemel sonuçlara ulaşmak için doğru kararların alınmasında başvurulan bir kavramdır.

Basit anlamıyla olasılık, bir olayın gerçekleşmeden önce sonucunu tahmin etmenin sayılarla ifadesidir.

- Bir madenî paranın havaya atılması durumunda yazı ya da tura gelme oranı,
- Bir tavla oyununda zarların çift gelmesi, birinin 3 ve diğerinin 1 gelmesi gibi eylemlerin gerçekleşme durumudur.

Önceden sonucu bilinmeyen olayların gerçekleşme durumlarına ilişkin veri toplama sürecine deney adı verilir.

İçinde farklı renkte bilyeler bulunan bir torbadan bir bilyenin çekilmesi, madenî paranın havaya atılması işlemlerinin her biri **matematiksel deneylere** birer örnektir.

Bir deneyde elde edilen sonuçların her birine o deneye ait çıktı denir.

Örneğin havaya madenî para atılması bir deneydir ve burada yere düşen madenî paranın üst yüzünde **“yazı”** ya da **“tura”** gelmesi sonuçları bu deneye ait çıktılardır.

Bir deneyin bütün çıktılarının kümesine o deneyin örnek uzayı denir.

Örnek uzay, genellikle **E** ile gösterilir.

Örnek uzayın her bir alt kümesine olay denir.

Bir madenî paranın bir defa atılması deneyindeki basit olaylar **{yazı }** ve **{tura}** olur.

A olayının çıktılarının dışında örnek uzayın bütün çıktılarını içeren olaya

A olayının tümleyeni denir ve

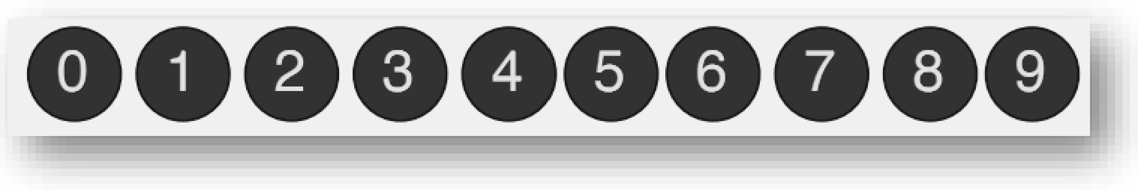
A' ile gösterilir.

Hatırlayalım:

$$\mathbf{s}(\ \mathbf{A}\ ) + \mathbf{s}(\mathbf{A}') = \mathbf{s}(\mathbf{E})$$

Bir kümenin eleman sayısı ile tümleyeninin eleman sayısının toplamı evrensel kümenin eleman sayısıdır.

DENEY	ÇIKTILAR	ÖRNEK UZAY
Madeni paranın bir kez havaya atılması		
Zarın bir kez atılması		



- Tüm rakamların yazılı olduğu özdeş bilyeler bir torbaya konuluyor. Torbadan “rastgele” bir bilye çekilip üzerinde yazan sayıya bakılıyor. **Bu işlem bir deneydir.**

- Torbadaki tüm bilyelerde yazan rakamlar, **örnek uzayı** oluşturur.

Örnek uzay kümesi

E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ve

örnek uzayın eleman sayısı $\mathbf{s(\,E)=10}$ olur.

- Torbadan rastgele çekilen bilyelerin üzerinde çift rakam yazma olayı A ise

  $\mathbf{A} = \{\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}\}$ ve $\mathbf{s}(\,\mathbf{A}\,) = \mathbf{5}$ olur.

- Torbadan rastgele çekilen bir bilyenin üzerinde 7 rakamının yazması bir **basit olaydır.**

- Torbadan rastgele çekilen bir bilyenin üzerinde asal sayı yazması olayı B ise

  $\mathbf{B} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}\}$ ve $\mathbf{s}(\,\mathbf{B}\,) = \mathbf{4}$ olur.

  B olayının tümleyeni, ‘‘Torbadan rastgele çekilen bir bilyenin üzerinde asal sayı yazmaması’’ olayıdır.

  Bu olay $\mathbf{B}' = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{9}\}$ şeklinde yazılır ve $\mathbf{s}(\,\mathbf{B}'\,) = \mathbf{6}$ olur.

  $$\mathrm{s(B)} + \mathrm{s(B')} = 10 = \mathrm{s(E)}$$

n tane madenî paranın birlikte atılması deneyi ile
bir madenî paranın n defa atılması deneyinin örnek uzayı aynıdır
ve
$\boldsymbol{2^n}$ elemanlıdır.

n tane zarın birlikte atılması deneyi ile

bir zarın n defa atılması deneyinin örnek uzayı aynıdır

ve

6^n elemanlıdır.

Aynı örnek uzaydaki bir olaya ait olası durumların sayısı başka bir olaya ait olası durumların sayısına

- ✓ Eşit ise bu olaylara **eş olası olaylar**
- ✓ Eşit değil ise **eş olası olmayan olaylar**

denir.

ÖRNEK :

Bir zar atma deneyinde eş olası durumda olan ve eş olası durumda olmayan olaylar belirtelim.

- Tek sayı gelme olayı
- Asal sayı gelme olayı
- Gelen sayının 3 e bölünmesi olayı

OLASILIK

Her bir çıktısının gelme şansı eşit olan örnek uzay E ve bu örnek uzayın bir olayı A olmak üzere A olayının gerçekleşme olasılığı P(A) ile gösterilir. Buradan

$$P(A) = \frac{\text{A olayının eleman sayısı}}{\text{Örnek uzayın eleman sayısı}} = \frac{s(A)}{s(E)}$$

ile bulunur.

Bu durum eş olası olmayan olaylar için geçerli değildir !

Bir para atma deneyinde elde edilen basit olayların olasılıkları eşit ise bu para **hilesizdir** denir.Aynı durum zar atma deneyi için de geçerlidir.

Herhangi bir A olayının gerçekleşme olasılığı P(A),

gerçekleşmeme olasılığı P(A') olmak üzere

$P(A) + P(A') = 1$ olur.

Bir olayın gerçekleşme değerinin [0,1] ndaki bir reel sayı ile gösterilmesine bu **olayın olma olasılığı** denir.

Bir deney sonucunda gerçekleşmesi mümkün olan tüm durumların kümesine **kesin olay** denir.

Kesin olayların olma olasılığı **1** dir.

Bir deney sonucunda gerçekleşmesi mümkün olmayan olaya **imkânsız olay** denir.

İmkânsız olayın olma olasılığı **0** dır.

İki olayın birleşiminin olasılığı

$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ şeklinde hesaplanır.

Aynı anda gerçekleşmesi mümkün olmayan olaylara **ayrık olaylar** denir.

A ve B ayrık olaylar ise

$P(A \cap B) = 0$ ve

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olur.

KOŞULLU OLASILIK

E örnek uzayında A ve B iki olay olsun. B olayının gerçekleşmiş olması hâlinde A olayının gerçekleşme olasılığına A olayının B olayına bağlı **koşullu olasılığı** denir ve bu olasılık **P(A|B)** şeklinde gösterilir.

A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı $P(B) \neq 0$ olmak üzere

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

SORU :

Bir çift zarın atılması deneyinde üst yüze gelen sayıların toplamının 8 olduğu biliniyor.
Buna göre bu sayıların her ikisinin de asal olma olasılığı kaçtır?

SORU :

E örnek uzayında A ve B olayları verilsin.

$P(A') = \frac{2}{3}$,
$P(B') = \frac{1}{2}$ ve
$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

olduğuna göre B olayının A olayına bağlı koşullu olasılığı kaçtır?

Bağımlı ve Bağımsız Olaylar

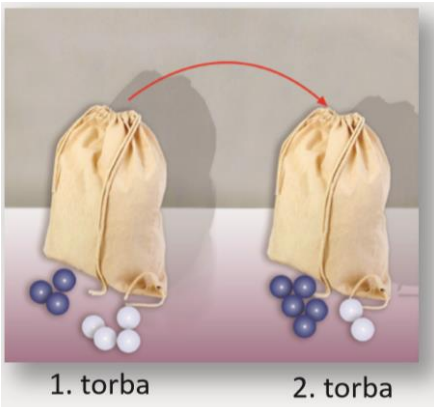
E örnek uzayında A ve B olayları için $P(A) > 0, \ \ P(B) > 0$ olmak üzere B olayının gerçekleşme olasılığı, A olayının gerçekleşme olasılığını etkilemiyorsa **A olayı B olayından bağımsızdır** denir.

A ile B bağımsız olaylar ise $\boxed{\mathbf{P(A \cap B) \ = \ P(A).P(B)}}$ olur.

A olayının gerçekleşme olasılığı, B olayının gerçekleşme olasılığını etkiliyorsa **A ve B olaylarına bağımlı olaylar** denir.

A ile B bağımlı olaylar ise $P(A \cap B) \ = \ P(A).P(B|A)$ olur.

SORU :



İki torbadan birincisinde özdeş 3 mavi, 4 beyaz; ikincisinde özdeş 5 mavi, 2 beyaz bilye vardır. Birinci torbadan rastgele bir bilye çekilip ikinci torbaya atılıyor.

Buna göre ikinci torbadan rastgele çekilecek bilyenin beyaz olma olasılığı kaçtır?

ÖRNEK :

İçerisinde özdeş 5 sarı ve 7 mavi top bulunan bir torbadan rastgele çekilen top geri konulmak üzere iki top çekiliyor.

Buna göre

a) Çekilen topların ikisinin de sarı olma olasılığı kaçtır?

b) Çekilen topların birinin sarı, diğerinin mavi olma olasılığı kaçtır?

Deneysel ve Teorik Olasılık

Bir deneyde ortaya çıkabilecek tüm sonuçlar göz önünde bulundurularak yapılan matematiksel hesaplamaya **teorik olasılık** denir.

Bir olayın olma olasılığını yapılan denemelerin sonuçlarına göre bulmaya **deneysel olasılık** denir. Olayın gerçekleşme sayısının deney sayısına oranına olayın **deneysel olasılığı** denir.

Bir örnek uzayda deneysel olasılık değeri, deneme sayısı arttıkça teorik olasılık değerine yaklaşır.

VERİ

Bir sonuç çıkarmak ya da çözüme ulaşabilmek için gözlem, deney, araştırma gibi yöntemlerle elde edilen her bilgiye **veri** adı verilir.

Kesikli Veri

Belirli bir aralıktaki her gerçek sayı değerini alamayan veri türüdür.

- Okulun kantininden alışveriş yapan öğrencilerin günlere göre sayısı,
- Nesli tükenmekte olan bir kuş türünün yıllara göre nüfus sayısı,
- Bir gazetenin haftalık satış sayısı vb gibi veriler **kesikli veri grubuna** örnektir.

Sürekli Veri

Belirli bir aralıktaki her gerçek sayı değerini alabilen veri türüdür. Bir diğer ifadeyle aralıksız devam eden verilerdir.

- Bir bitkinin yıllara göre boyunun uzaması,
- Bir şehrin aylara göre sıcaklık değişimi,
- Aylara göre elektrik veya su sarfiyatı değişimi vb **sürekli veri grubuna** birer örnektir.

Okulun 9-A sınıfındaki Fatih isimli öğrencinin matematik karne notunun 85 olması, bulunduğu sınıfın bu dersteki başarısı hakkında bilgi edinilmesi için yeterli değildir.

Ama sınıfın matematik karne not ortalamasının 85 olması genel başarı hakkında fikir verir. Tek başına bulunduğu topluluk hakkında detaylı bilgi sunamayan veri, diğerleriyle birlikte değerlendirildiğinde anlam kazanır; ortak bir dil oluşturur.

Merkezî eğilim ve yayılım ölçüleri verilerin anlaşılabilmesine yardımcı olur.

- **Merkezî Eğilim Ölçüleri**
  - Aritmetik ortalama
  - Ortanca (Medyan)
  - Tepe değer (Mod)

Merkezî eğilim ölçülerinin her biri verilerin hangi değer etrafında toplandığını gösterir.

- **Merkezî Yayılım Ölçüleri**
  - En Büyük ve En Küçük Değer
  - Açıklık (Aralık)
  - Standart sapma

Merkezî yayılım ölçülerinin her biri verilerin birbirlerinden ne kadar uzak olduklarının ölçüsüdür.

Merkezî Yayılım Ölçüleri

Aritmetik Ortalama

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ veri grubunun toplamının veri sayısına bölünmesi ile hesaplanır ve $\bar{x}$ içiminde gösterilir.
Bu durumda

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

ile bulunur.

Aritmetik ortalama veri grubunun genel durumu hakkında bir bilgi verir. !

Ortanca (Medyan)

Veri grubu küçükten büyüğe doğru sıralandığında gruptaki terim sayısı tek ise tam ortadaki sayıdır. Terim sayısı çift ise ortaya gelen iki sayının aritmetik ortalamasıdır.

Tepe Değer (Mod)

Grupta en çok tekrar eden veridir.
Aynı sayıda birden çok tekrar eden veri varsa birden fazla tepe değeri vardır.
Eğer tekrar eden veri yoksa tepe değer yoktur.

Tepe değer ve ortanca, veri grubundaki uç değerlerden aritmetik ortalamaya göre daha az etkilenir.

!

Merkezî Yayılım Ölçüleri

En Büyük ve En Küçük Değer

Bir veri grubunda bulunan en küçük sayıya **en küçük değer**, en büyük sayıya **en büyük değer** denir.

Açıklık (Aralık)

Veri grubunda bulunan en büyük değer ile en küçük değer arasındaki **farktır.**

Standart Sapma

Bir veri grubundaki sayıların birbirine yakınlığını ve uyumluluğunu ölçen bir yöntemdir.
Verilerin aritmetik ortalamaya göre nasıl bir yayılım (dağılım) gösterdiğine yardımcı olur.
Bir veri grubunun standart sapmasını bulmak için

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ veri grubunun aritmetik ortalaması olan $\bar{x}$ değeri bulunur.
- Her bir verinin aritmetik ortalamadan farkının karesi alınır ve toplanır.
- Bulunan toplam, veri sayısının bir eksiğine bölünür ve elde edilen

sonucun karekökü alınır.
Standart sapma S ile gösterilir ve

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

işlemi ile bulunur.

SORU:

Aşağıdaki tabloda İdil ve Kıvanç isimli iki öğrencinin bir yıl boyunca matematik dersinden aldığı yazılı notları verilmiştir.

İdil	4	3	4	4	5
Kıvanç	5	4	3	3	5

Bu öğrencilerden hangisinin yapılacak bir matematik bilgi yarışmasına gönderilmesinin daha uygun olur?

- Standart sapma sıfıra yaklaştıkça gruptaki verilerin farklılıkları azalır.
- Standart sapma veri grubundaki elemanların aritmetik ortalamaya yakınlığını ya da uzaklığını verir.
- Standart sapma küçüldükçe veri grubundaki değerler aritmetik ortalamaya yaklaşır.

Her terimi birbirine eşit olan bir veri grubunun standart sapması hakkında,

- Her bir terime x denirse aritmetik ortalama da x olur.
- Bu durumda her bir terimin aritmetik ortalamadan farkı 0 olacağından standart sapma 0 bulunur.
- Standart sapmanın 0 olduğu bu grupta, ölçülen özellik bakımından verilerin eş özelliklere sahip olduğu söylenir.

SORU:

Bir kantinci satışa sunacağı 5 farklı marka sütün seçimi için öğrencilere anket uygulayacaktır.

Anket sonuçlarını değerlendirmek için aşağıdaki ölçülerden hangisinin kullanması daha uygun olur?

- Aritmetik ortalama
- Ortanca
- Tepe değer
- Açıklık
- Standart sapma

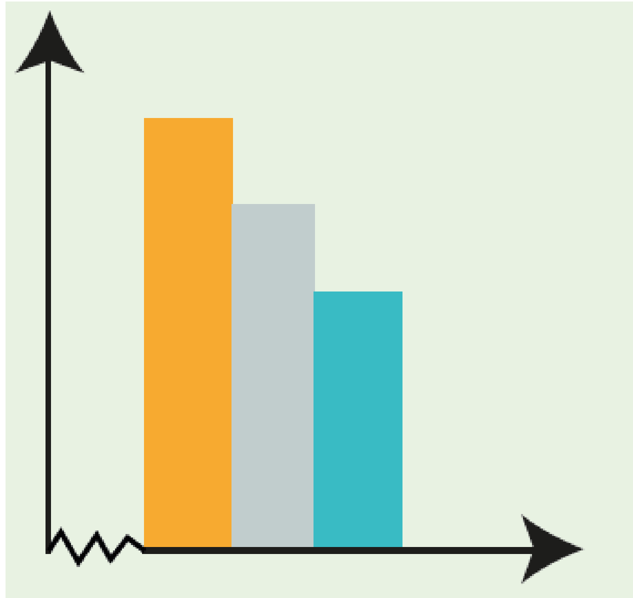
VERİLERİN GRAFİK İLE GÖSTERİLMESİ

Bir Veri Grubuna İlişkin Histogram Grafiği

Gruplandırılmış bir veri topluluğunda, verilerin tekrar etme sayılarının bitişik dikdörtgen şeklindeki sütunlar hâlinde gösterimidir. Histogram genelde sürekli verilerin gösteriminde kullanılır.

Histogram grafik çizimi yapılırken aşağıdaki adımlar izlenir.

- Veriler küçükten büyüğe doğru sıralanır.
- Açıklık bulunur.
- İstenen grup sayısı belirlenir (Grup sayısı araştırma yapan kişiye göre değişir.).
- $\text{Grup Genişliği} > \dfrac{\text{Açıklık}}{\text{Grup Sayısı}}$ olur.



Grup genişliği, $\dfrac{\text{Açıklık}}{\text{Grup Sayısı}}$

değerinden büyük en küçük tam sayıdır.

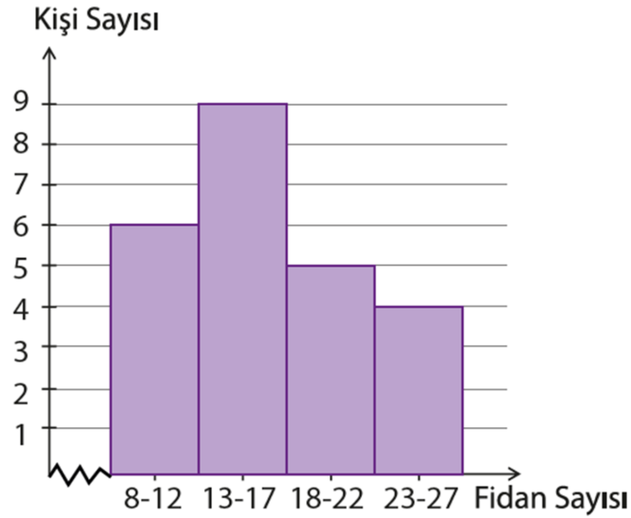
Örneğin bu değer;

- 4 çıkarsa grup genişliği 5,
- 4,1 çıkarsa grup genişliği 5,
- 5,8 çıkarsa grup genişliği 6

olarak alınır.

ÖRNEK :

Grafik : İzcilerin Diktiği Fidan Sayıları



Tablo : İzcilerin Diktiği Fidan Sayıları

Fidan sayısı	Kişi sayısı
8-12	6
13-17	9
18-22	5
23-27	4

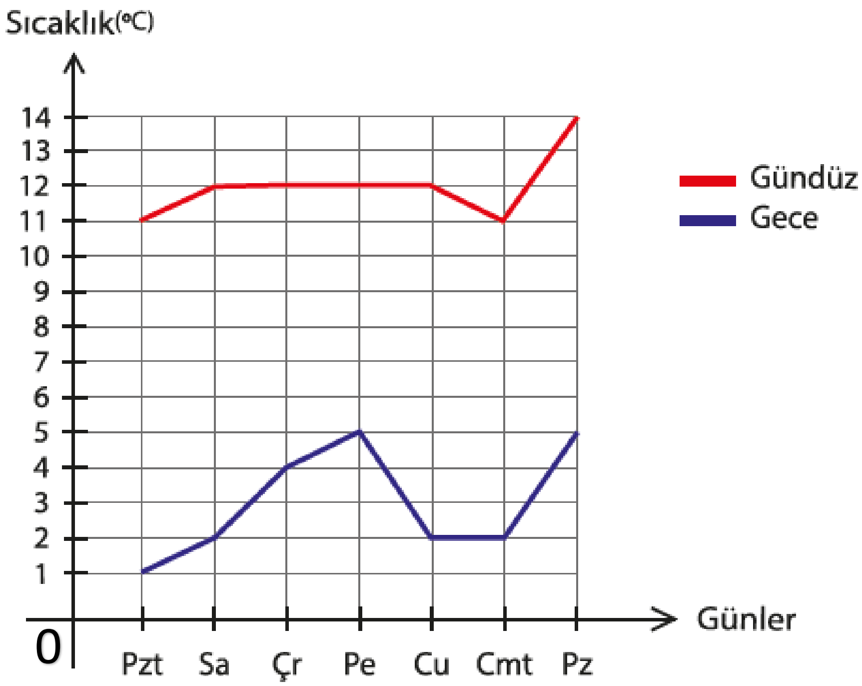
GERÇEK HAYAT DURUMUNU YANSITAN VERİ GRUPLARINI UYGUN GARAFİK TÜRLERİNİ ÇİZEREK YORUMLAMA

Birden fazla verinin birbirine göre durumunu kıyaslamak, verilerin birbirlerine göre hangi konum ve seviyede bulunduğunu anlamak için grafikler çizilir.

Çizgi Grafiği

Sürekli verilerin yatay ve düşey eksendeki değerleri işaretlenerek bulunan noktaların düz çizgilerle birleştirilmesi sonucunda elde edilen grafik türüdür.

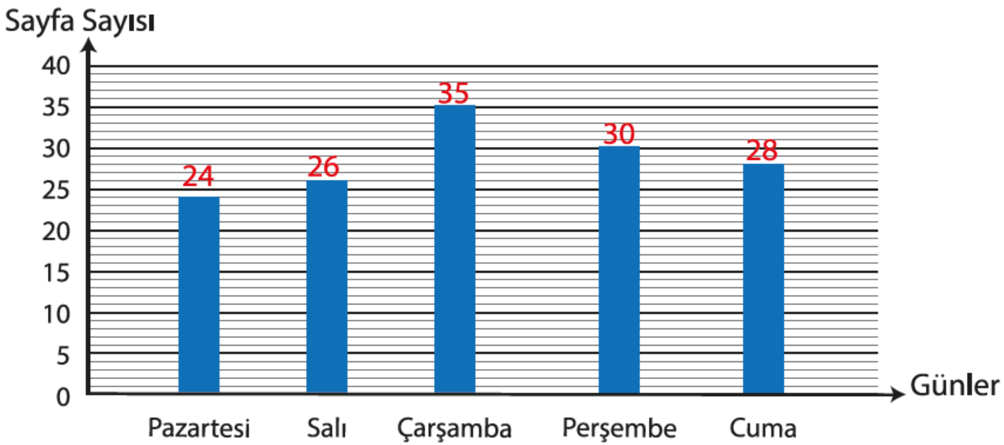
Grafik : Bir İldeki Haftalık Sıcaklık Değerleri



Sütun Grafiği

Veri gruplarını karşılaştırmak için dik koordinat sisteminde yatay ya da düşey olacak şekilde sütun ya da çubuk kullanılarak çizilen grafik türüdür.
Sütun grafiği kesikli veriler için kullanılır.

Grafik : Günlere göre Okunan Sayfa Sayısı



Daire Grafiği

Verilerin bütüne olan oranını daire dilimleri şeklinde gösteren grafik türüdür.
Veriler daire grafiğine merkez açının ölçüsüyle orantılı olarak yerleştirilir.

ÖRNEK

1080 öğrencisi bulunan Cumhuriyet Anadolu Lisesinde öğrenci temsilcisi olmak için aday olan öğrenciler ve aldıkları oylar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo: Aday Olan Öğrencilerin Aldıkları Oy Sayısı

Adaylar	Ata	Gizem	Sude	Cenk	Berfin
Alınan oy sayısı	135	360	270	180	135

Grafik : Aday Olan Öğrencilerin Aldıkları Oy Sayısı