

3.1. Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar

3.1.1. Fonksiyonun Grafik ve Tablo Temsilini Kullanarak Problem Çözme

$y = f(x) = ax + b$ Şeklindeki Fonksiyonların Grafikleri ile İlgili Uygulamalar

Bir bitkinin boyunun zamana göre değişimi, bir aracın yakıt tüketimi, bir ürünün alış ve satış fiyatı arasındaki ilişki vb. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $y = ax + b$ şeklindeki fonksiyonların grafikleri ile ifade edilebilir. Bu bölümde bu türden fonksiyonların grafikleri ile ilgili örnekler verilecektir.

4. Örnek

Bir çocuğun kumbarasında 10 TL vardır. Çocuk, kumbarasına her gün 3 TL atıyor. Bununla ilgili tablo aşağıda verilmiştir. Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Zaman(gün)	0	1	2	3	4	5	...
Para Miktarı(TL)	10	13	16	19	22	25	...

- a) Kumbarada biriken paranın miktarını zamanın bir fonksiyonu olarak yazınız.
b) Kumbarada 25. günde birikecek paranın miktarını bulunuz.

Çözüm

a) x , gün sayısı olsun.

Çocuk, kumbaraya her gün 3 TL attığında kumbaradaki para x günde $3x$ TL olur.

Baştaki 10 TL de eklendiğinde paranın miktarı x gün sonra $f(x) = 10 + 3x$ olarak bulunur.

b) 25. günde toplanan paranın miktarı

$f(25) = 10 + 3 \cdot 25 = 85$ TL olur.

Fonksiyon Grafiğinin Eksenleri Kestiği Noktalar

Polinom fonksiyonlarının grafiği x veya y eksenini en az bir noktada keser.

Analitik düzlemde bir fonksiyon grafiğinin eksenleri kestiği noktalar aşağıdaki gibi bulunur.

Koordinat sisteminde x eksenini üzerindeki noktaların ordinatları sıfır olduğundan bir fonksiyonun

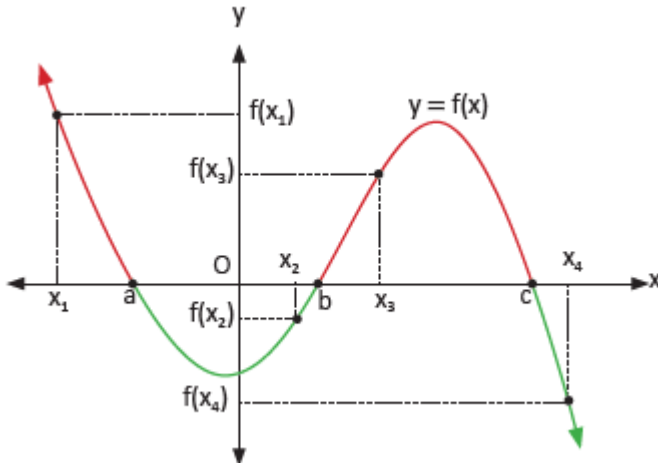
grafiğinin x eksenini kestiği noktayı bulmak için fonksiyonda y yerine sıfır yazılır ve x değeri

veya değerleri bulunur. Benzer şekilde y eksenini üzerindeki noktaların absisleri sıfır olduğundan

fonksiyonun grafiğinin y eksenini kestiği noktayı bulmak için fonksiyonda x yerine sıfır yazılır ve y değeri bulunur.

Fonksiyonun Pozitif ve Negatif Olduğu Aralıklar

Aşağıda fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıklar grafik üzerinden açıklanacaktır.



Yukarıdaki grafikte $x_1 < a$ ve $b < x_3 < c$ için sırasıyla $f(x_1)$ ve $f(x_3)$ değerleri pozitiftir. Böylece $f(x)$ fonksiyonunun pozitif değer aldığı aralıkların $(-\infty, a)$ ve (b, c) olduğu görülür. Grafiğin x ekseninin üst kısmında kalan bölümlerinde her x değeri için $f(x) > 0$ olur.

Grafikte $a < x_2 < b$ ve $c < x_4$ için sırasıyla $f(x_2)$ ve $f(x_4)$ değerleri negatiftir. Böylece $f(x)$ fonksiyonunun negatif değer aldığı aralıkların (a, b) ve (c, ∞) olduğu görülür. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseninin altında kalan bölümlerinde her x değeri için $f(x) < 0$ olur.

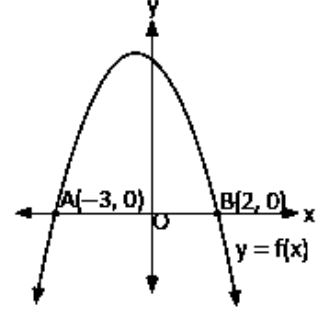
Fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği a, b, c noktaları için $f(x) = 0$ olduğundan, bu noktalar **fonksiyonun sıfırlarıdır**.

7. Örnek

Şekilde verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $A(-3, 0)$ ve $B(2, 0)$ noktalarından geçmektedir. $f(x) > 0$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamını bulunuz.

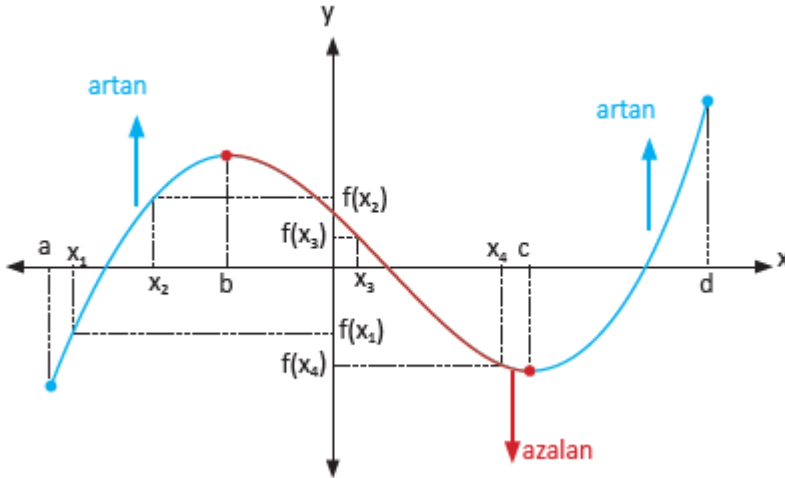
Çözüm

$-3 < x < 2$ aralığında $f(x) > 0$ olur. Bu aralıklardaki tam sayılar -2, -1, 0, 1 olduğundan bu tam sayıların toplamı -2 olur.



Artan ve Azalan Fonksiyonlar

Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar grafik üzerinden açıklanacaktır



$A \subset \mathbb{R}$, $B \subset A$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde bir f fonksiyonu verilsin.

Bu durumda her $x_1, x_2 \in B$ için $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) < f(x_2)$ olursa f fonksiyonuna B de **artan fonksiyon** denir.

Her $x_1, x_2 \in B$ için $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) > f(x_2)$ olursa f fonksiyonuna B de **azalan fonksiyon** denir.

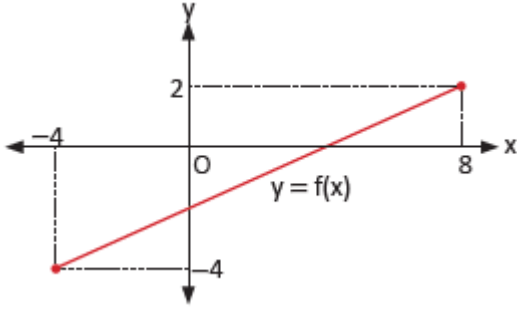
Yukarıdaki grafikte

$[a, b]$ nda alınan $x_1 < x_2$ şartını sağlayan her x_1, x_2 için $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu $[a, b]$ nda artandır.

$[b, c]$ nda alınan $x_3 < x_4$ şartını sağlayan her x_3, x_4 için $f(x_3) > f(x_4)$ olduğundan

Maksimum ve Minimum Noktalar

Analitik düzlemde verilen bir fonksiyon grafiğinin görüntü kümesinde aldığı en büyük ve en küçük değerler aşağıdaki gibi bulunur.



Yanda grafiği verilen $f: [-4, 8] \rightarrow [-4, 2]$, $y = f(x)$ fonksiyonunun aldığı en büyük değeri $x = 8$ için $f(8) = 2$, en küçük değeri $x = -4$ için $f(-4) = -4$ olur.

$A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

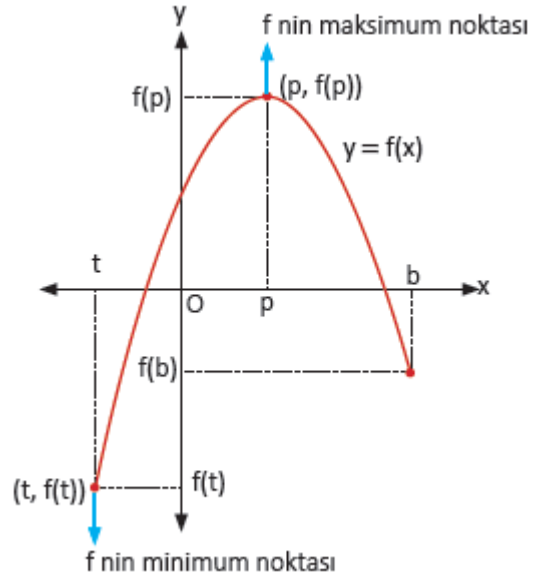
Her $x \in A$ için $f(x) \leq f(p)$ olacak şekilde bir

$p \in A$ sayısı varsa $(p, f(p))$ noktasına f nin

maksimum noktası, $f(p)$ ye f nin **maksimum değeri** denir.

Her $x \in A$ için $f(x) \geq f(t)$ olacak şekilde bir

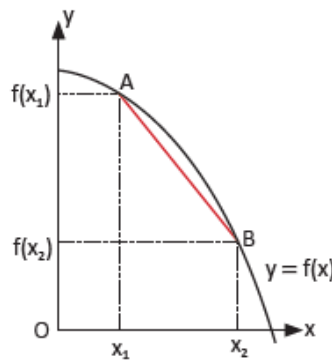
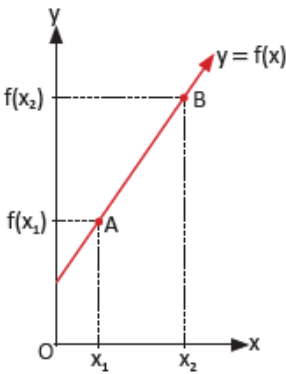
$t \in A$ sayısı varsa $(t, f(t))$ noktasına f nin **minimum noktası**, $f(t)$ ye f nin **minimum değeri** denir.



Ortalama Değişim Hızı

Bir niceliğin değerindeki değişimin başka bir nicelikteki değişime kıyasla ortalama ne kadar olacağını gösteren orana **ortalama değişim hızı** denir.

Fonksiyonların belli bir aralıktaki ortalama değişim hızı aşağıdaki gibi hesaplanır.



$y = f(x)$ fonksiyonunun $[x_1, x_2]$ nda ortalama değişim hızı $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ olarak tanımlanır.

(Δx : A dan B ye x değerindeki değişim ve Δy : A dan B ye y değerindeki değişim).

• Doğrusal fonksiyonların herhangi bir aralıktaki ortalama değişim hızı sabittir ve doğrunun eğimine eşittir.

• $[x_1, x_2]$ ndaki ortalama değişim hızı $A(x_1, f(x_1))$ ve $B(x_2, f(x_2))$ noktalarından geçen kesenin eğimine eşittir.

13. Örnek

$g(x) = x^3 - 2x + 4$ fonksiyonunun $-2 \leq x \leq 3$ aralığındaki ortalama değişim hızını bulunuz.

Çözüm

$$g \text{ nin } [-2, 3] \text{ ndaki ortalama değişim hızı } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(3) - g(-2)}{3 - (-2)} = \frac{25 - 0}{5} = 5$$

3.2. İkinci Dereceden Fonksiyonlar ve Grafikleri

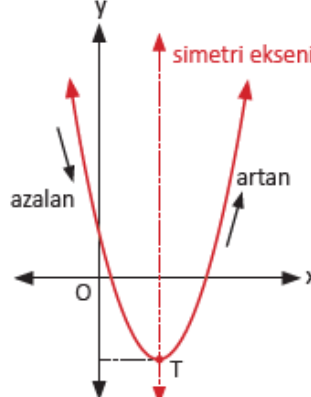
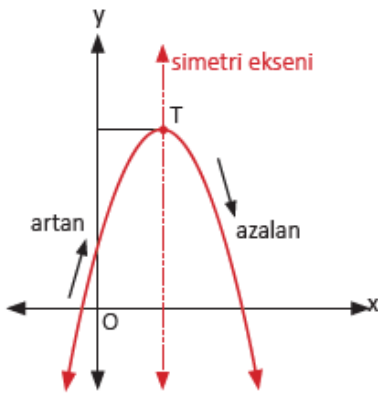
3.2.1. İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyon Grafiğinin Çizimi

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki fonksiyonlara **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon** denir.

Bu fonksiyonları sağlayan (x, y) nin analitik düzlemde oluşturdukları noktalar kümesine **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların grafiği** denir.

Bu fonksiyonların grafiği **parabol**dür. Parabolde fonksiyonun artan olduğu aralıktan azalan olduğu aralığa geçtiği noktaya veya azalan olduğu aralıktan artan olduğu aralığa geçtiği noktaya **tepe noktası** denir. Tepe noktası **T** ile gösterilir. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere fonksiyon en küçük ya da en büyük değerini tepe noktasında alır.



$f(x) = ax^2 + bx + c$ Fonksiyonunun Grafiği

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki fonksiyonun grafiğini (parabol) çizebilmek için aşağıdaki işlemler yapılmalıdır.

- Parabolün kollarının yönü tespit edilir.

$a > 0$ ise parabolün kolları yukarı doğru, $a < 0$ ise parabolün kolları aşağı doğrudur.

- Parabolün tepe noktası bulunur.

$y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktasının koordinatları $T(r, k)$ olmak üzere

$$r = -\frac{b}{2a} \text{ ve } k = f(r) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ olur.}$$

- Parabolün eksenleri kestiği noktalar bulunur.

$x = 0 \Rightarrow f(0) = c$ olduğundan parabol y eksenini $(0, c)$ noktasında keser.

$y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ olur. Burada

$\Delta > 0$ ise parabol x eksenini farklı iki noktada keser.

$\Delta < 0$ ise parabol x eksenini kesmez.

$\Delta = 0$ ise parabol x eksenine teğettir.

Bulunan bu noktaların birleştirilmesiyle parabol grafiği çizilebilir.

18. Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

Parabolün y eksenini kestiği nokta $x = 0$ için $y = -3$ olur.

Parabolün x eksenini kestiği noktalar $y = 0$ için $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$$(2x - 1)(x + 3) = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ ve } x_2 = -3 \text{ olur.}$$

Tepe noktasının koordinatları

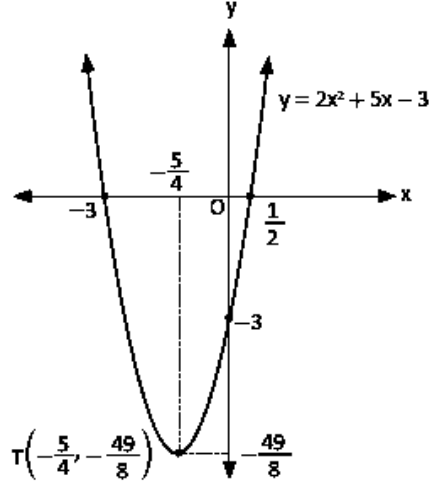
$$r = -\frac{b}{2a} \Rightarrow r = -\frac{5}{2 \cdot 2} = -\frac{5}{4}$$

$$k = f\left(-\frac{5}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) - 3$$

$$k = 2 \cdot \frac{25}{16} - \frac{25}{4} - 3 = \frac{25}{8} - \frac{37}{4} = -\frac{49}{8}$$

$$T\left(-\frac{5}{4}, -\frac{49}{8}\right) \text{ olur.}$$

Parabolün tepe noktası ve eksenleri kestiği nokta birleştirilerek grafik yandaki gibi çizilir.



Parabolün Denklemini Yazma

Parabolün grafiğine bağlı olarak denklem üç farklı duruma göre yazılabilir.

1. Biri y ekseninde olmak üzere parabolün herhangi üç noktası $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda yerine yazılarak a, b, c katsayıları bulunur ve parabol denklemi elde edilir.

2. $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu için $f(x) = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Bu durumda parabol denklemi

$$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \text{ şeklinde yazılır.}$$

$(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ noktaları dışında parabol üzerinde verilen üçüncü bir nokta yardımıyla a değeri bulunur ve parabol denklemi elde edilir.

3. Tepe noktasının koordinatları $T(r, k)$ olsun. Parabolün üzerinde tepe noktası dışında ikinci bir nokta bilindiğinde bu noktalar $y = a \cdot (x - r)^2 + k$ denkleminde yerine yazılarak a değeri bulunur ve parabol denklemi elde edilir.

Bir Doğru ile Bir Parabolün Durumu

$y = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrusunun durumları incelenirken denklemlerin ortak çözümü yapılır. Bunun için her iki denklemde y değerleri birbirine eşitlenir.

$$ax^2 + bx + c = mx + n \Rightarrow ax^2 + (b - m)x + c = 0$$

İki denklemin ortak çözümüyle ulaşılan denkleme **ortak çözüm denklemi** denir.

Bulunan ortak çözüm denkleminin diskriminantı (Δ) için

1. $\Delta < 0$ ise

Ortak çözüm denkleminin kökü yoktur.

O hâlde **parabol ile doğru kesişmez.**

2. $\Delta = 0$ ise

Ortak çözüm denkleminin birbirine eşit iki kökü vardır.

O hâlde **doğru parbole teğettir.**

3. $\Delta > 0$ ise

Ortak çözüm denkleminin farklı iki reel kökü vardır.

O hâlde **parabol ile doğru farklı iki noktada kesişir.**

29. Örnek

$y = x^2 + x$ parabolü ile $y = 3x + n$ doğrusu kesişmediğine göre n nin en geniş değer aralığını bulunuz.

Çözüm

$x^2 + x = 3x + n \Rightarrow x^2 - 2x - n = 0$ ortak çözüm denklemdir.

Doğrular kesişmediğinden ortak çözüm denkleminin kökü yoktur. $\Delta < 0$ olmalıdır.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-n) < 0$$

$$4 + 4n < 0 \Rightarrow 4n < -4 \Rightarrow n < -1 \text{ olur.}$$

En geniş değer aralığı $(-\infty, -1)$ olur.

3.3. Fonksiyonların Dönüşümleri

Tek ve Çift Fonksiyonların Grafiklerinin Simetri Özellikleri

Çift fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetrik, tek fonksiyonların grafikleri orijine göre simetriktir.

Fonksiyonların Dönüşümleri

$f(x)$ verildiğinde $f(x) + b$, $f(x - a)$, $k \cdot f(x)$, $f(k \cdot x)$, $-f(x)$, $f(-x)$ dönüşümleri GeoGebra yardımı ile çizilecektir.