

ÇEMBERİN ANALİTİK İNCELENMESİ

Çember Denklemi

Merkezi ve Yarıçapı Verilen Çemberin Denklemi

Analitik düzlemde $M(a, b)$ merkezli ve r yarıçaplı çember üzerinde bir $P(x, y)$ noktası alınırsa $M(a, b)$ ile $P(x, y)$ noktaları arasındaki uzaklık

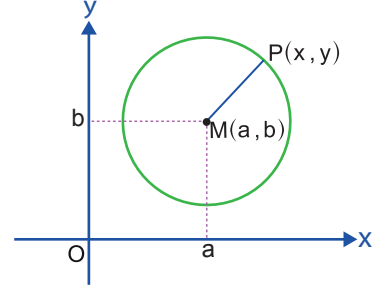
$$|MP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \text{ olur. } |MP| = r \text{ olduğundan}$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \text{ bulunur.}$$

Bu ifadenin her iki tarafının karesi alınarak

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \text{ denklemi elde edilir.}$$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ denklemine merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı r birim olan **çemberin standart denklemi** denir. Çember üzerindeki bir $P(x, y)$ noktası çemberin denklemini sağlar.

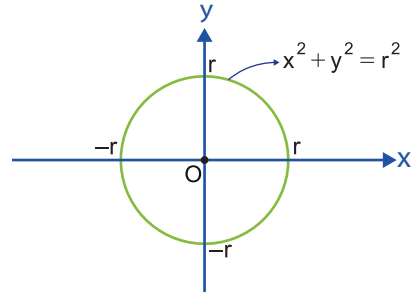


Bazı Özel Çemberlerin Denklemleri

1. Merkezi Orijinde Olan Çemberin Denklemi

Merkezi orijinde ve yarıçapı r birim olan çemberin standart denklemi

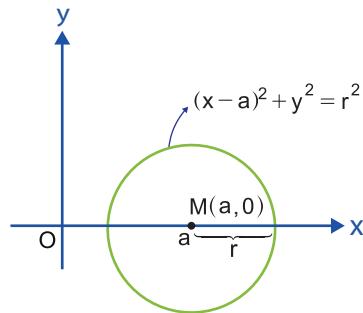
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \text{ olur.}$$



2. Merkezi x Ekseninde Olan Çemberin Denklemi

Merkezi x ekseninde bulunan bir çemberde merkezin koordinatları $M(a, 0)$ olacaktır. Çemberin yarıçapı r birim ise bu çemberin standart denklemi

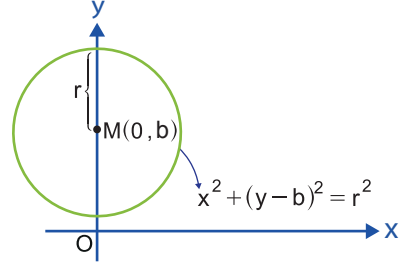
$$(x-a)^2 + y^2 = r^2 \text{ olur.}$$



3. Merkezi y Eksen Üzerinde Olan Çemberin Denklemi

Merkezi y ekseninde bulunan bir çemberde merkezin koordinatları $M(0, b)$ olacaktır. Çemberin yarıçapı r birim ise bu çemberin standart denklemi

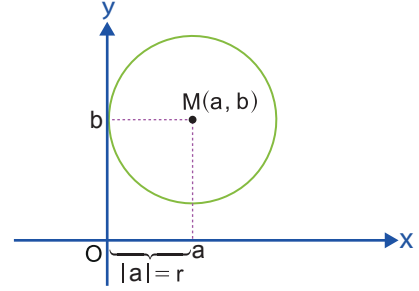
$$x^2 + (y - b)^2 = r^2 \text{ olur.}$$



4. y Eksenine Teğet Olan Çemberin Denklemi

Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı r birim olan bir çember, y eksenine teğet ise $r = |a|$ olur. Bu durumda çemberin standart denklemi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 \text{ olur.}$$

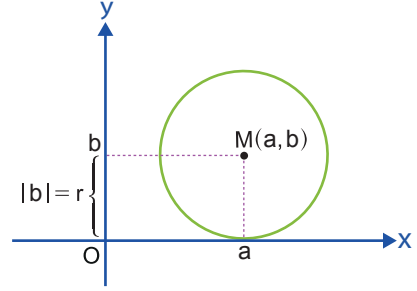


5. x Eksenine Teğet Olan Çemberin Denklemi

Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı r birim olan bir çember, x eksenine teğet ise $r = |b|$ olur.

Bu durumda çemberin standart denklemi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2 \text{ olur.}$$



6. Her İki Eksene de Teğet Olan Çemberin Denklemi

Çember her iki eksene de teğet ise $r = |a| = |b|$ olur. Bu durumda oluşan çemberlerin merkezleri $y = x$ ve $y = -x$ doğruları üzerinde olacaktır. Eğer çember

I. bölgede ise merkezi $M_1(r, r)$ ve denklemi

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \text{ olur.}$$

II. bölgede ise merkezi $M_2(-r, r)$ ve denklemi

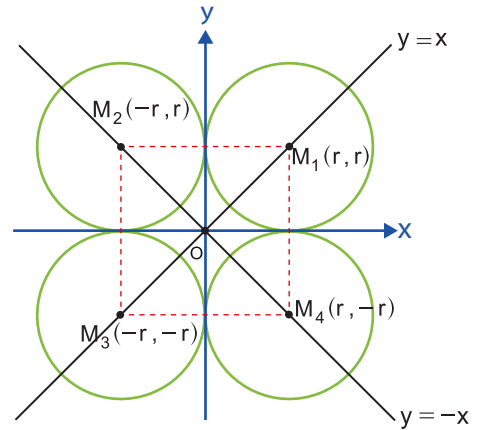
$$(x + r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \text{ olur.}$$

III. bölgede ise merkezi $M_3(-r, -r)$ ve denklemi

$$(x + r)^2 + (y + r)^2 = r^2 \text{ olur.}$$

IV. bölgede ise merkezi $M_4(r, -r)$ ve denklemi

$$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2 \text{ olur.}$$



Çemberin Genel Denklemi

Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı r birim olan çemberin standart denklemi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

şeklindedir. Bu denklem düzenlenerek

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \text{ olur.}$$

$$-2a = D, -2b = E \text{ ve } a^2 + b^2 - r^2 = F \text{ alınırsa}$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

bulunur. Bu ifadeye **çemberin genel denklemi** denir.

$$\left. \begin{array}{l} D = -2a \Rightarrow a = -\frac{D}{2} \\ E = -2b \Rightarrow b = -\frac{E}{2} \end{array} \right\} \text{ olduğundan çemberin merkezi } M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - r^2 = F &\Rightarrow \left(-\frac{D}{2}\right)^2 + \left(-\frac{E}{2}\right)^2 - r^2 = F \\ &\Rightarrow \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - r^2 = F \\ &\Rightarrow D^2 + E^2 - 4 \cdot r^2 = 4 \cdot F \\ &\Rightarrow 4 \cdot r^2 = D^2 + E^2 - 4 \cdot F \\ &\Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{D^2 + E^2 - 4 \cdot F} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$D^2 + E^2 - 4 \cdot F$ ifadesi için aşağıdaki durumlar vardır.

✓ $D^2 + E^2 - 4 \cdot F > 0$ ise verilen denklem bir çember belirtir.

✓ $D^2 + E^2 - 4 \cdot F = 0$ ise verilen denklem bir nokta belirtir.

Bu nokta $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ dir.

✓ $D^2 + E^2 - 4 \cdot F < 0$ ise verilen denklem gerçek sayılar kümesinde çember belirtmez.

Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı r birim olan çemberin standart denklemi olan

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ifadesinin düzenlenmesi ile elde edilen

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

çemberin genel denklemine dikkat edilirse denklemde xy li terimin bulunmadığı görülür.

Ayrıca bu denklemde eşitliğin her iki tarafı sabit bir k sayısı ile çarpılırsa yukarıdaki ifadeye özdeş

$$k \cdot x^2 + k \cdot y^2 + k \cdot Dx + k \cdot Ey + k \cdot F = 0$$

denklemi elde edilir. Elde edilen son denklemde x^2 ve y^2 li terimlerin katsayılarının aynı olması durumunda ifade yine bir çember denklemi olur.

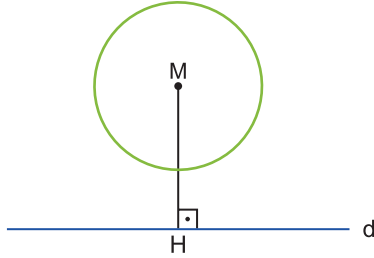
$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ denkleminin bir çember belirtmesi için

1. $C = 0$ olmalıdır.
2. x^2 li ve y^2 li terimlerin katsayıları eşit ($A = B$) olmalıdır.
3. $D^2 + E^2 - 4 \cdot F > 0$ olmalıdır.

Denklemleri Verilen Doğru ile Çemberin Birbirine Göre Durumları

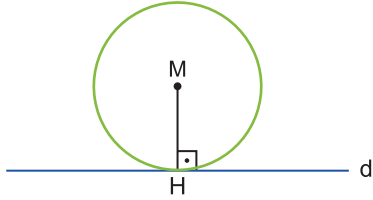
- ✓ Doğru ile çemberin birbirine göre durumları, çemberin merkezinin doğruya olan uzaklığına göre değerlendirilir. Herhangi bir d doğrusu ile merkezi M ve yarıçapı r olan çemberin birbirine göre üç durumu vardır.

I.



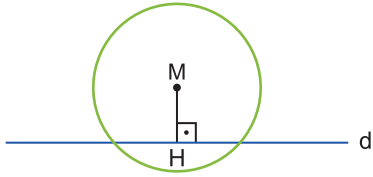
$|MH| > r$ ise doğru çemberi kesmez.

II.



$|MH| = r$ ise doğru çembere teğettir.

III.



$|MH| < r$ ise doğru çemberi iki noktada keser.

- ✓ Genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ olan çember ile $y = mx + n$ doğrusunun ortak çözümü yapılarak doğru ile çemberin birbirine göre durumları incelenir. Çember denkleminde y yerine $mx + n$ yazılarak $ax^2 + bx + c = 0$ biçiminde ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklemin diskriminantı $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere

I. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise doğru çemberi kesmez.

II. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise doğru çembere teğettir.

III. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise doğru çemberi iki noktada keser.

Bu durumda $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin

- ✓ Kökü yoksa doğru ile çemberin kesim noktası yoktur.
✓ Çift katlı kökü varsa bu kök, doğrunun çembere teğet olduğu noktanın apsisi.
✓ Farklı iki kökü varsa bu kökler doğru ile çemberin kesim noktalarının apsisi.