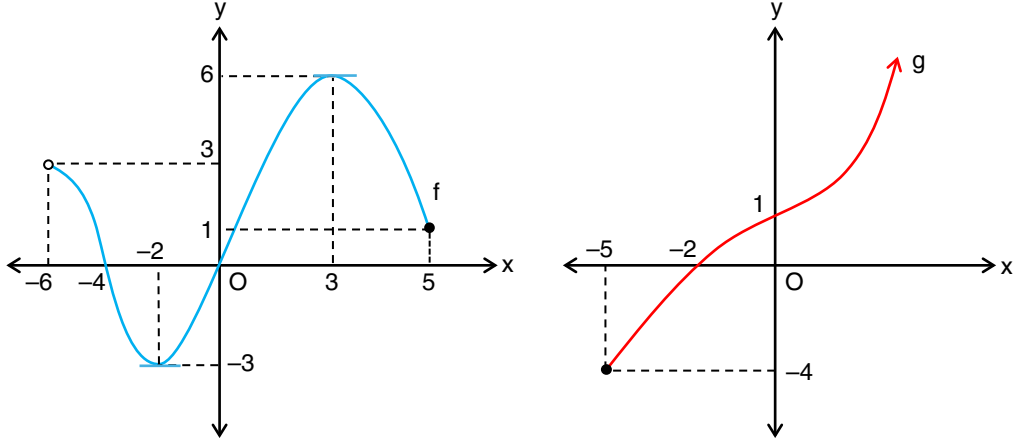




1. Aşağıda $f: (-6, 5] \rightarrow [-3, 6]$ ve $g: [-5, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olarak tanımlanan f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre f ve g fonksiyonlarının grafiklerini inceleyerek tablodaki boşlukları uygun şekilde doldurunuz. (15 Puan)

	f Fonksiyonu	g Fonksiyonu
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
Fonksiyonun Sınırları		
Pozitif Değerli Olduğu Aralıklar		
Negatif Değerli Olduğu Aralıklar		
Artan Olduğu Aralıklar		
Azalan Olduğu Aralıklar		
Maksimum Noktası ve Değeri		
Minimum Noktası ve Değeri		
Bire Bir Olma Durumu		
Örten Olma Durumu		

2. Bir şehirde hava kirliliğini ölçen bir sensör, gün içerisinde PM2.5 değerini (hava kirliliği yoğunluğu) ölçmektedir. Sensörün ölçüm değerleri aşağıdaki fonksiyonla modellenmiştir.
 $f(x) = -(x - 9)^2 + 81$

Burada x saat, $f(x)$ ise ölçülen kirlilik indeksidir. Sensör ölçümleri $0 \leq x \leq 18$ zaman aralığında yapılmaktadır. PM2.5 değerinin 0 (sıfır) birim olması, havanın tamamen temiz olduğu durumu ifade etmektedir.

Buna göre

- Fonksiyonun grafiğini karesel referans fonksiyonundan yararlanarak çizin. Uyguladığınız adımları belirtiniz. (10 Puan)
- Bu zaman aralığında hava kirliliğinin alabileceği maksimum değer nedir ve bu değeri ölçüm başladıktan kaç saat sonra alır? Yazınız. (5 Puan)
- Havanın temiz olduğu saatleri bulunuz. (5 Puan)

3. Bir uçangözün (drone) yerden yükseldikçe sinyal gücü azalmaktadır. Yapılan ölçümlerde uçangözün (drone) yerden yüksekliği x metre iken sinyal gücü aşağıdaki fonksiyonla modellenmiştir:

$$f(x) = -3\sqrt{x-2} + 18$$

Burada x yükseklik (metre), $f(x)$ ise sinyal gücüdür. Uçangözün (drone) sinyal gücü ölçümü yalnızca sinyalin alınabildiği yüksekliklerde yapılabilmektedir.

Sinyal gücü 0 veya daha küçük olduğunda sistem ölçüm yapmamakta ve uçuş durdurulmaktadır.

Buna göre

- a. Uçangözün (drone) sinyal gücünü temsil eden fonksiyonun grafiğini karekök referans fonksiyonundan yararlanarak çizin. Uyguladığınız adımları belirtiniz. (10 Puan)
- b. Uçangözün (drone) sinyal gücünü temsil eden fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini bulunuz. (5 Puan)
4. $f: \mathbb{R} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R} - \{b\}$ olmak üzere $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu bire bir ve örtendir. Buna göre f fonksiyonunun tersinin cebirsel temsilini bulup $a + b$ değerini hesaplayınız. (10 Puan)

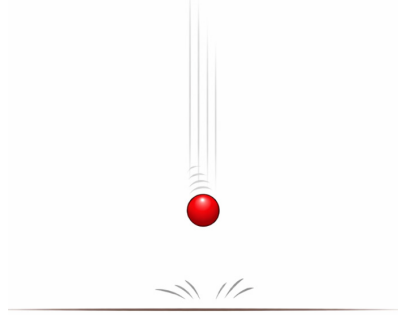
5. Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların tersinin cebirsel temsilini, fonksiyonun tersinin olmasını sağlayan tanım ve değer kümelerini bulunuz. Bu ifadeleri tablodaki uygun alanlara yazınız. (10 Puan)

Tanım ve Değer Kümesi	Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	a ve b Değeri (Uygun en geniş aralıklar için)
$g: [-2, \infty) \rightarrow [b, \infty)$	$g(x) = (x+2)^2 - 1$		$b =$
$h: [a, \infty) \rightarrow [b, \infty)$	$h(x) = \sqrt{x+1} - 3$		$a =$ $b =$

6. $f(x) = \frac{1}{x}$ referans fonksiyonu ile bu fonksiyondan türetilen $g(x) = \frac{3}{x-2} + 4$ rasyonel fonksiyonu verilmiştir.

Buna göre $g(x)$ fonksiyonunun gerçek sayılar kümesindeki en geniş tanım kümesini ve bu tanım kümesine karşılık gelen görüntü kümesini sembolik olarak ifade ediniz. (10 Puan)

7. Bir topun yerden yüksekliği, zamana bağlı olarak $f(x) = 16 - t^2$ karesel fonksiyonu ile modellenmiştir.



Buna göre

- a. Topun yüksekliğinin 7 metreden daha fazla olduğu zaman aralığını; karesel fonksiyonun nitel özelliklerini ve basit eşitsizlik çözümünü kullanarak bulunuz. (5 Puan)
- b. Topun fırlatıldığı platformun yüksekliğinin 5 metre daha artırılması durumunda topun yere çarpma süresinin nasıl değişeceğini denklem kurmadan, fonksiyonun öteleme özelliğini kullanarak yorumlayınız. (5 Puan)
8. Bir su filtresinin verimliliği(V), filtreden geçen suyun basıncına(P) bağlı olarak $V(P) = \frac{10}{\sqrt{P-2}}$ fonksiyonu ile ölçülmektedir.

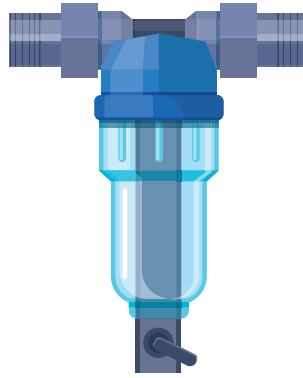
Filtrenin verimli çalışabilmesi için verimlilik değeri olan V nin en fazla 5 birim olması gerekmektedir.

SU FİLTRESİ VERİMLİLİK MODELİ

Sistem Değişkenleri

Giriş Basıncı (P)
Filtreden geçen suyun uyguladığı basınç değerini temsil eder.

Verimlilik Değeri (V)
Filtrenin performansını ölçen ve basınca bağlı olarak değişen çıktı değeridir.



Performans Kriterleri

$$V(P) = \frac{10}{\sqrt{P-2}}$$

Verimlilik Fonksiyonu
Verimlilik, bu formül ile hesaplanır.

Maksimum Çalışma Sınırı
Filtrenin verimli sayılabilmesi için V değerinin en fazla 5 olması gerekir.

Buna göre filtrenin verimli çalıştığı en geniş P basınç aralığını, fonksiyonun tanımsız olduğu değerleri de dikkate alarak belirleyiniz. (10 Puan)

SORU NO	ÖĞRENME ÇIKTISI	BECERİLER
1	MAT.10.2.1. Gerçek sayılarda fonksiyon olma şartları ile gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların nitel özelliklerini matematiksel temsillerle değerlendirebilme	MAB1. Matematiksel Muhakeme
2	MAT.10.2.2. Gerçek sayılarda $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen $(g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k (a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0))$ karesel fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilme	MAB2. Matematiksel Problem Çözme
3	MAT.10.2.3. Gerçek sayılarda $f(x) = \sqrt{x} (x \geq 0)$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen $(g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k (a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0))$ karekök fonksiyonlarının nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilme	MAB2. Matematiksel Problem Çözme
4	MAT.10.2.5. Doğrusal, karesel, karekök ve rasyonel referans fonksiyonlar ile bu fonksiyonlardan türetilen fonksiyonların ters fonksiyonlarına dair çıkarım yapabilme a) Referans fonksiyonlar ve bunlardan türetilen fonksiyonlar üzerinden bir fonksiyonun ters fonksiyonuna ilişkin varsayımlarda bulunur. b) Varsayımlarından yararlanıp farklı durumlara ilgili örüntüleri listelemeye referans fonksiyonlar ve bunlardan türetilen fonksiyonların ters fonksiyonlarına ilişkin genellemeler yapar.	MAB1. Matematiksel Muhakeme MAB2. Matematiksel Problem Çözme
5	c) Referans fonksiyonlar ve bunlardan türetilen fonksiyonların ters fonksiyonlarıyla ilişkisine dair varsayımları ile genellemelerini karşılaştırır. ç) Referans fonksiyonlar ve bunlardan türetilen fonksiyonların ters fonksiyon ilişkisine ait önermeleri matematiksel olarak doğrulanabilecek şekilde sunar. d) Referans fonksiyonlar ve bunlardan türetilen fonksiyonların ters fonksiyonlarına ait elde edilen önermeleri fonksiyonların genel özellikleri bağlamında değerlendirir.	MAB1. Matematiksel Muhakeme MAB2. Matematiksel Problem Çözme
6	MAT.10.2.4. Gerçek sayılarda $f(x) = \frac{1}{x} (x \neq 0)$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen $(g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k (a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0))$ rasyonel fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilme	MAB1. Matematiksel Muhakeme MAB2. Matematiksel Problem Çözme
7	MAT.10.2.2. Gerçek sayılarda $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen $(g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k (a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0))$ karesel fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilme	MAB2. Matematiksel Problem Çözme
8	MAT.10.2.3. Gerçek sayılarda $f(x) = \sqrt{x} (x \geq 0)$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen $(g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k (a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0))$ karekök fonksiyonlarının nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilme	MAB2. Matematiksel Problem Çözme

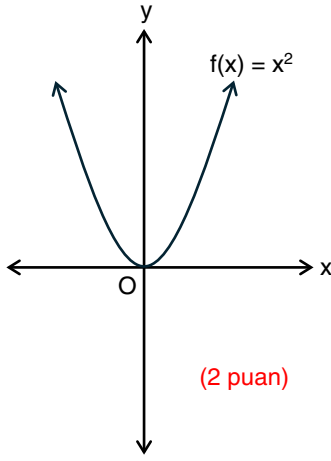
PUANLAMA TABLOSU												
1	2			3		4	5	6	7		8	TOPLAM
	2.a.	2.b.	2.c.	3.a.	3.b.				7.a.	7.b.		
15	10	5	5	10	5	10	10	10	5	5	10	100

ÇÖZÜMLER

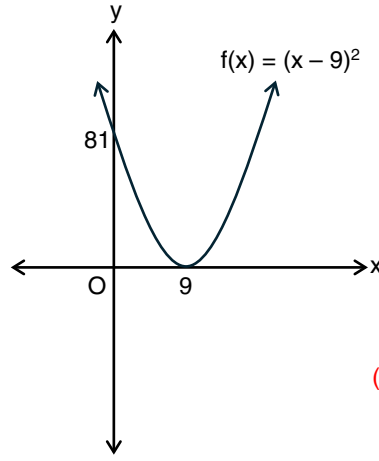
1.

	f Fonksiyonu	g Fonksiyonu	
Tanım Kümesi	$(-6, 5]$	$[-5, \infty)$	(1 puan)
Görüntü Kümesi	$[-3, 6]$	$[-4, \infty)$	(1 puan)
Fonksiyonun Sıfırları	$x = -4, x = 0$	$x = -2$	(1 puan)
Pozitif Değerli Olduğu Aralıklar	$(-6, -4) \cup (0, 5]$	$(-2, \infty)$	(2 puan)
Negatif Değerli Olduğu Aralıklar	$(-4, 0)$	$[-5, -2)$	(1 puan)
Artan Olduğu Aralıklar	$[-2, 3]$	$[-5, \infty)$	(2 puan)
Azalan Olduğu Aralıklar	$(-6, -2]$ ve $[3, 5]$	Yok	(1 puan)
Maksimum Noktası ve Değeri	$x = 3$ te maksimum değerini alır. Maksimum değer 6 dır.	Yok	(2 puan)
Minimum Noktası ve Değeri	$x = -2$ de minimum değerini alır. Minimum değer -3 tür.	$x = -5$ de minimum değerini alır. Minimum değer -4 tür.	(2 puan)
Bire Bir Olma Durumu	Bire bir değildir.	Bire birdir.	(1 puan)
Örten Olma Durumu	Örtendir.	Örten değildir.	(1 puan)

2.a.



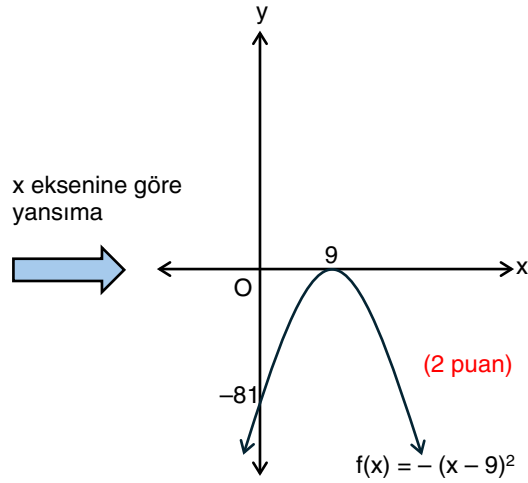
x eksenine boyunca
pozitif yönde
9 birim öteleme



$f(0) = 81$
olduğundan fonksiyon
y ekseninde (0, 81)
noktasından geçer.

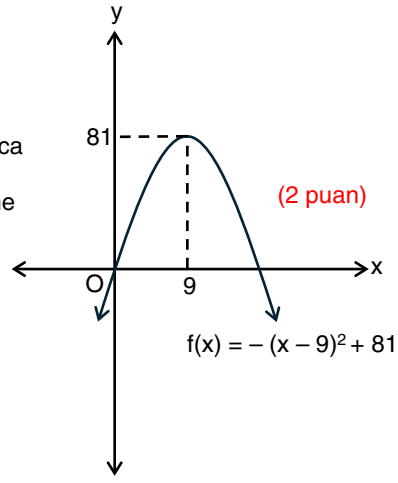
(2 puan)

(2 puan)



x eksenine göre
yansıma

y eksenine boyunca
pozitif yönde
81 birim öteleme

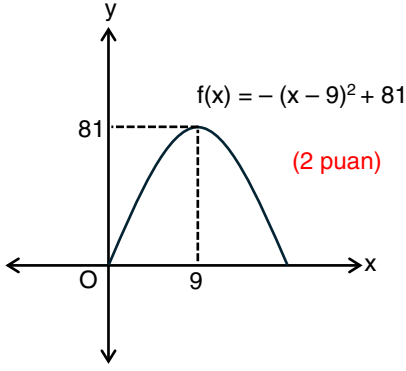


(2 puan)

(2 puan)

Fonksiyon İsmi	a, r ve k Sürgülerinin Değerleri	Oluşan Karesel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $f(x) = a(x-r)^2 + k$	Karesel Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karesel Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm	
f(x)	a = -1 r = 9 k = 81	$f(x) = -(x-9)^2 + 81$	Bağımsız değişkenin 9 eksiğinin aldığı değerın karesinin -1 katına 81 ekleme	x eksenine boyunca pozitif yönde 9 birim öteleme ardından x eksenine göre yansıma, son olarak y eksenine boyunca pozitif yönde 81 birim öteleme	(2 puan)

2.b.



Fonksiyon grafiği incelendiğinde hava kirliliğinin alabileceği maksimum değer 81 birimdir. Hava kirliliği bu değeri ölçüm başladıktan 9 saat sonra alır. (3 puan)

2.c. Havanın temiz olduğu saatlerde kirlilik 0 değerini almalıdır.

Fonksiyonun sıfırları bulunursa havanın hangi saatlerde temiz olduğu bulunabilir. (1 puan)

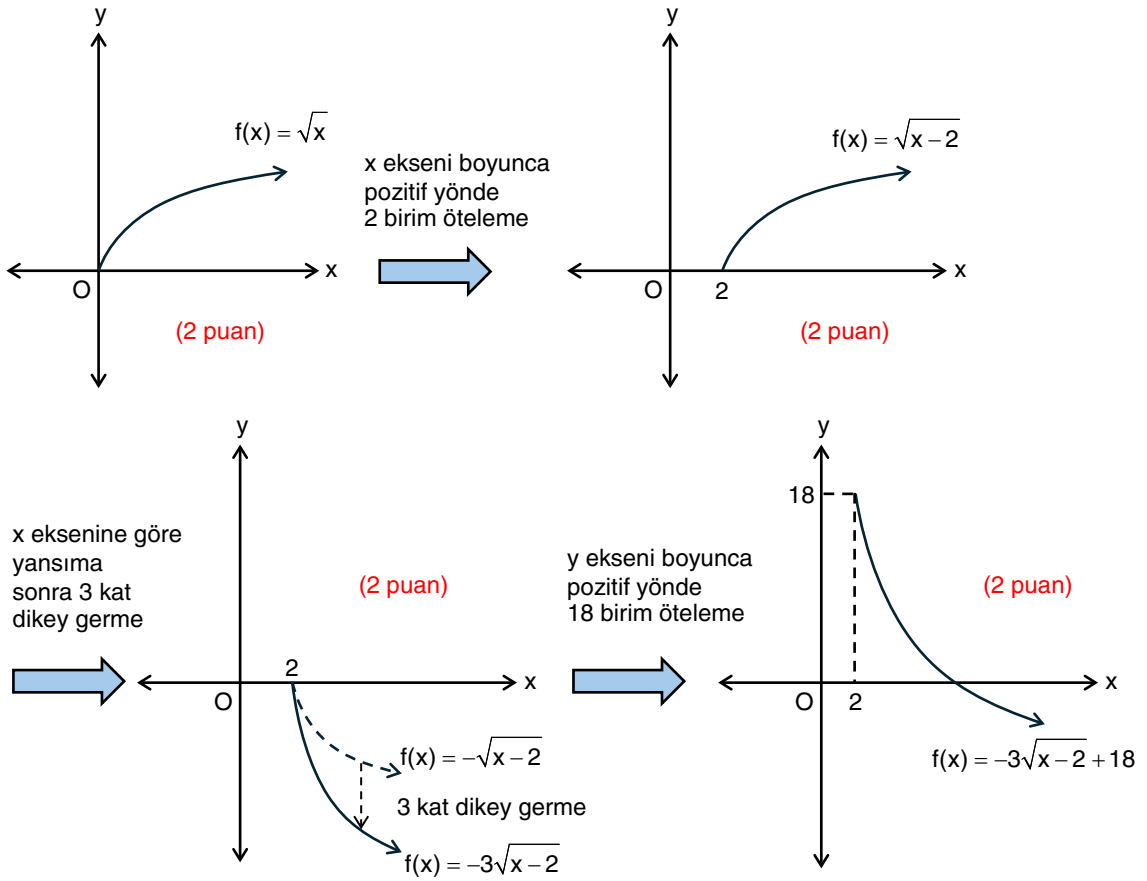
$$f(x) = -(x - 9)^2 + 81 = 0 \quad (1 \text{ puan})$$

$$(x - 9)^2 = 81 \quad (1 \text{ puan})$$

$$x - 9 = 9 \text{ veya } x - 9 = -9 \quad (1 \text{ puan})$$

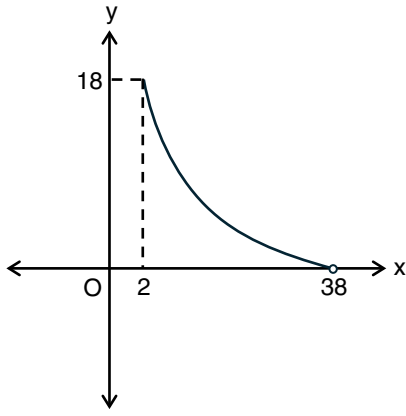
Buradan $x = 18$ veya $x = 0$ bulunur. (1 puan)

3.a



Fonksiyon İsmi	a, r ve k Sürgülerinin Değerleri	Oluşan Karekök Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsili $f(x) = a\sqrt{x-r} + k$	Karekök Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
$f(x)$ (2 puan)	$a = -3$ $r = 2$ $k = 18$	$f(x) = -3\sqrt{x-2} + 18$	Bağımsız değişkenin 2 eksiğinin aldığı değerinin karekökünü -3 ile çarpma ardından 18 ekleme	x eksenine boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme ardından x eksenine göre yansıma ve yansımadan sonra 3 kat dikey germe son olarak y eksenine boyunca pozitif yönde 18 birim öteleme

3.b.



Fonksiyonun tanımlı olabilmesi için karekök içerisinde bulunan ifade

$x - 2 \geq 0$ olmalıdır. Buradan $x \geq 2$ bulunur. (1 puan)

Sinyal gücünün 0 (sıfır) veya daha küçük bir değere ulaşması durumunda uçuş otomatik olarak sonlandırıldığından fonksiyonun grafiği, x ekseninin altında kalan değerler için dikkate alınmaz. Bu nedenle grafik, x eksenini kestiği (veya x eksenine değdiği) noktada sonlandırılmalıdır. (1 puan)

Bu değer

$$-3\sqrt{x-2} + 18 > 0$$

$$18 > 3\sqrt{x-2}$$

$$6 > \sqrt{x-2}$$

$$36 > x-2$$

$$x < 38 \text{ bulunur. (2 puan)}$$

Fonksiyon grafiği incelendiğinde tanım kümesi: $[2, 38)$ ve görüntü kümesi: $(0, 18]$ bulunur. (1 puan)

4. $y = f(x)$ fonksiyonunun kuralı yazılır.

$$y = f(x) = \frac{1}{x+2} - 3 \quad y = f(x) \text{ fonksiyonunda } x \text{ değişkeni yalnız bırakılır.}$$

$$y = \frac{1}{x+2} - 3 \Rightarrow y + 3 = \frac{1}{x+2} \Rightarrow x + 2 = \frac{1}{y+3} \Rightarrow x = \frac{1}{y+3} - 2 \quad (2 \text{ puan})$$

Elde edilen son denklemde x değişkeni yerine y, y değişkeni yerine x yazılır.

$$y = \frac{1}{x+3} - 2 \quad (1 \text{ puan})$$

Elde edilen fonksiyon $y = f^{-1}(x)$ olarak isimlendirilir.

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{x+3} - 2 \quad (1 \text{ puan})$$

Fonksiyonun tanım ve görüntü kümeleri bulunurken, tanımsızlık noktaları gerçek sayılar kümesinden çıkarılarak kümeler belirlenir.

$$y = f(x) = \frac{1}{x+2} - 3 \text{ fonksiyonunda } x + 2 = 0 \text{ ise } x = -2 \text{ için fonksiyon tanımsızdır. Tanım kümesi: } \mathbb{R} - \{-2\} \text{ olur.} \quad (2 \text{ puan})$$

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{x+3} - 2 \text{ fonksiyonunda } x + 3 = 0 \text{ ise } x = -3 \text{ için fonksiyon tanımsızdır. Görüntü kümesi: } \mathbb{R} - \{-3\} \text{ olur.} \quad (2 \text{ puan})$$

Buradan $a = -2$ ve $b = -3$ bulunur.

$$a + b = -5 \text{ olur. (2 puan)}$$

5. Fonksiyonun tersinin cebirsel temsilinin bulunabilmesi için öncelikle verilen fonksiyonda x değişkeni yalnız bırakılmalıdır.

$$y = g(x) = (x + 2)^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = (x + 2)^2 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{y + 1} \quad (1 \text{ puan})$$

Tanım kümesi $[-2, \infty)$ olduğundan

$$x + 2 = \sqrt{y + 1} \Rightarrow x = \sqrt{y + 1} - 2 \text{ olur. } (1 \text{ puan})$$

Fonksiyonun tersi $y = g^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 2$ olarak bulunmuş olur. (1 puan)

Fonksiyonun tersinin tanımlı olabilmesi için karekök içerisinde bulunan $x + 1 \geq 0$ olmalıdır. Buradan $x \geq -1$ olur. Görüntü kümesi $[-1, \infty)$ olarak bulunur.

Böylece $b = -1$ olur. (1 puan)

Fonksiyonun tersinin cebirsel temsilinin bulunabilmesi için öncelikle verilen fonksiyonda x değişkeni yalnız bırakılmalıdır.

$$y = h(x) = \sqrt{x + 1} - 3 \Rightarrow y + 3 = \sqrt{x + 1} \Rightarrow x + 1 = (y + 3)^2 \Rightarrow x = (y + 3)^2 - 1 \quad (1 \text{ puan})$$

O hâlde $y = h^{-1}(x) = (x + 3)^2 - 1$ olarak bulunur. (1 puan)

$h(x) = \sqrt{x + 1} - 3$ ifadesinin bir fonksiyon belirtmesi için karekök içerisinde bulunan $x + 1 \geq 0$ olmalıdır.

Buradan $x \geq -1$ olur. Buradan tanım kümesinin en geniş aralığı $[-1, \infty)$ olarak bulunur.

Böylece $a = -1$ olur. (1 puan)

Fonksiyonun tersinin olabilmesi için bire bir ve örten olması gerektiğinden tanım aralığını fonksiyonda yerine yazdığımızda görüntü kümesi $[-3, \infty)$ olarak bulunur.

Böylece $b = -3$ olur. (1 puan)

Tanım ve Değer Kümesi	Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	a ve b Değeri (Uygun en geniş aralıklar için)
$g: [-2, \infty) \rightarrow [-1, \infty)$	$g(x) = (x + 2)^2 - 1$	$y = g^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 2$	$b = -1$ (1 puan)
$h: [-1, \infty) \rightarrow [-3, \infty)$	$h(x) = \sqrt{x + 1} - 3$	$y = h^{-1}(x) = (x + 3)^2 - 1$	$a = -1$ $b = -3$ (1 puan)

6. $x = 2$ için ifadenin paydası 0 olduğundan Tanım Kümesi $\mathbb{R} - \{2\}$ olur. (3 puan)

$$\frac{3}{x - 2} \neq 0 \text{ olduğu için } g(x) \text{ fonksiyonu } 4 \text{ değerini alamaz. } (3 \text{ puan})$$

Bu durumda Görüntü Kümesi $= \mathbb{R} - \{4\}$ olur. (4 puan)

7.a. $16 - t^2 > 7$ (1 puan)

$$t^2 < 9$$
 (1 puan)

$$-3 < t < 3$$
 bulunur. (1 puan)

Ancak $t \geq 0$ olduğu için istenen zaman aralığı $0 \leq t < 3$ olmalıdır. (2 puan)

7.b. Bu durum, fonksiyonun grafiğinin $f(t) + 5$ şeklinde dikeyde yukarı doğru ötelenmesi demektir. (2 puan)

Parabol şeklindeki bu fonksiyonun grafiği 5 birim yukarı ötelendiğinden topun yere çarpması için alması gereken yol ve dolayısıyla yere çarpma süresi artar. (3 puan)

8. $P - 2 > 0$ olmalıdır.(Paydadaki ifadenin değeri 0'a eşit olamaz.) (2 puan)

Dolayısıyla $P > 2$ bulunur. (2 puan)

$$\text{Verim şartı: } V(P) \leq 5 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{P-2}} \leq 5 \Rightarrow \sqrt{P-2} \geq 2 \Rightarrow P-2 \geq 4 \Rightarrow P \geq 6 \text{ olur. (2 puan)}$$

$P \geq 6$ Eşitsizliğinin çözüm kümesi, $P > 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini kapsadığı için $P \geq 6$ olmalıdır. (2 puan)

Böylece P nin en geniş değer aralığı $[6, \infty)$ bulunur. (2 puan)