BELİRSİZ İNTEGRAL

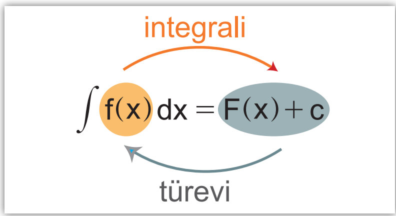
Belirsiz İntegral ve İntegral Alma Kuralları

$F(x)$ fonksiyonun türevi $f(x)$ olsun. Bu fonksiyonunun türevi alınmadan önceki hali olan $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun **ters türevi** denir. Bir fonksiyonun ters türevini bulma işlemine **integral alma işlemi** denir. $F(x)$ fonksiyonunun türevi $f(x)$ olmak üzere $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun **integrali** denir.

Türevi $f'(x)=2x$ olan $f(x)$ fonksiyonu, x^2, x^2+1, x^2-2, $x^2+\sqrt{2}$ vb. bir fonksiyondur. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonu $f(x)=x^2+c$, (c sabit) olarak ifade edilebilir. $f(x)=x^2+c$ fonksiyonuna $f'(x)=2x$ fonksiyonunun integrali denir. Burada c sabit sayısına da **integral sabiti** adı verilir.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali $\int \mathbf{f(x)\,dx}$ biçiminde ifade edilir. Bu integralin bulunması için $F'(x)=f(x)$ olacak şekilde bir $F(x)$ fonksiyonu araştırılır ve integral sabiti olan c bu $F(x)$ fonksiyonuna eklenir. Bu durumda

$$\int \mathbf{f(x)\,dx = F(x)+c} \quad \text{olur.}$$



İntegral Alma Kuralları

$n \neq -1$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c \Rightarrow F'(x)=x^n \text{ olduğundan } \int \mathbf{x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c} \text{ olur.}$$

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\int \mathbf{a\cdot x^n\,dx = a\cdot\int x^n\,dx} \quad \text{olur.}$$

$f(x)$ ve $g(x)$ integrallenebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$\int \mathbf{(f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$$

$$\int \mathbf{(f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx} \quad \text{olur.}$$

Diferansiyel Kavramı

Türevlenebilir bir $f(x)$ fonksiyonu için $\frac{d}{dx}(f(x)) = f'(x)$ ifadesi $f(x)$ fonksiyonunun türevi olmak üzere $\mathbf{d(f(x)) = f'(x) \cdot dx}$ ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun **diferansiyeli** denir.

Yani bir $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli olan $d(f(x))$ ifadesi, fonksiyonun türevi ile dx in çarpımına eşittir.

Değişken Değiştirme Yöntemi

İntegral alma kuralları ile alınması zor olan bazı integrallerin değişken değiştirme yöntemi kullanılarak daha basit integraller hâline getirildikten sonra kolayca integrali alınabilir.

$n \neq 0$, $n \neq -1$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$\int (f(x))^n \cdot f'(x) \cdot dx$ biçimindeki integrallerde sırasıyla aşağıdaki adımlar uygulanır.

$f(x) = u$ ($f(x) = u$ dönüşümü yapılır.)

$f'(x)dx = du$ (Her iki tarafın diferansiyeli alınır.)

$\int \underbrace{(f(x))^n}_{u^n} \cdot \underbrace{f(x) \cdot dx}_{du} = \int u^n \cdot du$ (Dönüşüm ve diferansiyel verilen integralde yerine yazılır.)

$= \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ (İntegral alınır.)

$= \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$ (u yerine eşiti olan $f(x)$ yazılır.)

$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)dx$ biçimindeki integrallerde $u = g(x)$ dönüşümü yapılır.

$g(x) = u \Rightarrow g'(x) \cdot dx = du$

$$\int \underbrace{f'(g(x))}_{f'(u)} \cdot \underbrace{g'(x) \cdot dx}_{du} = \int f'(u) \cdot du$$

$$= f(u) + c$$

$$= f(g(x)) + c \text{ olur.}$$

$f(x) \neq 0$, $n \neq 0$, $n \neq 1$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}\,dx$ biçimindeki integrallerde $u = f(x)$ dönüşümü yapılır.

$f(x) = u \Rightarrow f'(x) \cdot dx = du$ olur.

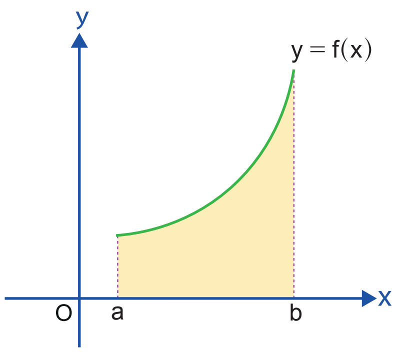
$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{[f(x)]^n}}_{\frac{1}{u^n}} \cdot \underbrace{f'(x) \cdot dx}_{du} = \int \frac{1}{u^n} \cdot du$$

$$= \int u^{-n} \cdot du$$

$$= \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + c$$

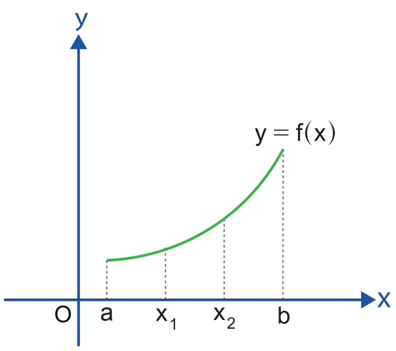
$$= \frac{[f(x)]^{1-n}}{1-n} + c \quad \text{bulunur.}$$

Bir Fonksiyonun Grafiği ile x Ekseni Arasında Kalan Sınırlı Bölgenin Alanının Riemann Toplamı Yardımıyla Yaklaşık Olarak Hesaplanması

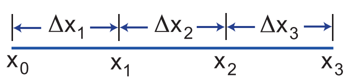


Yanda $[a, b]$ nda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$[a, b]$ nda $y = f(x)$ eğrisi ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı Alman matematikçi Bernhard Riemann (Bernard Riman) tarafından hesaplanmıştır.



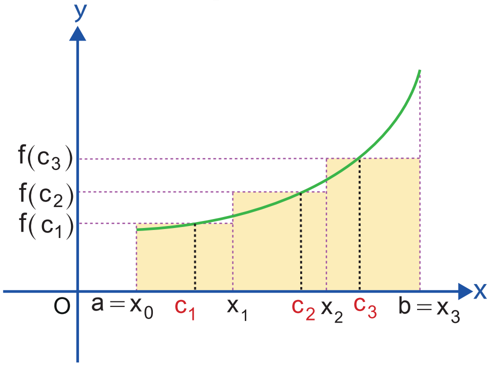
$[a, b]$ nda $a < x_1 < x_2 < b$ olmak üzere $a = x_0$ ve $b = x_3$ seçerek oluşturulan $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ kümesine $[a, b]$ nın bir bölünüşü denir. (Bu bölünüş eşit aralıklarla olmak zorunda değildir)



$$\left.\begin{aligned} |x_1 - x_0| &= \Delta x_1 \\ |x_2 - x_1| &= \Delta x_2 \\ |x_3 - x_2| &= \Delta x_3 \end{aligned}\right\} \text{ alt aralıkların genişlikleridir.}$$

Eğer $[a, b]$, n tane eşit alt aralığa bölünecek olursa ortak genişlik $\mathbf{\Delta x = \dfrac{b - a}{n}}$ olur.

Riemann Toplamı



✓ $c_1 \in [x_0, x_1]$ için $f(c_1)$, $[x_0, x_1]$ nın görüntü kümesinin bir elemanı,

✓ $c_2 \in [x_1, x_2]$ için $f(c_2)$, $[x_1, x_2]$ nın görüntü kümesinin bir elemanı,

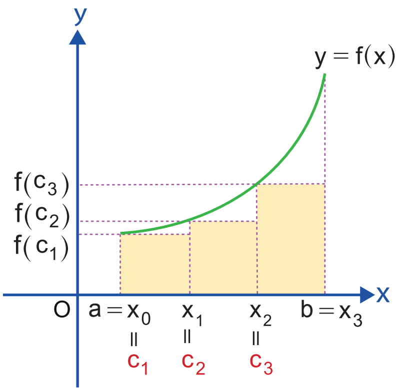
✓ $c_3 \in [x_2, x_3]$ için $f(c_3)$, $[x_2, x_3]$ nın görüntü kümesinin bir elemanı olmak üzere

Grafikteki oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren

$$\Delta x_1 \cdot f(c_1) + \Delta x_2 \cdot f(c_2) + \Delta x_3 \cdot f(c_3)$$

toplamına $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ na ait bir **Riemann toplamı** denir. Burada $[a, b]$ 3 alt aralığa ayrılmıştır. Eğer $[a, b]$ daha fazla alt aralığa ayrılırsa bulunan Riemann toplamının değeri eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

Riemann Alt Toplamı



✓ $c_1 \in [x_0, x_1]$ için $f(c_1)$, $[x_0, x_1]$ nın görüntü kümesinin <u>en küçük</u> elemanı,

✓ $c_2 \in [x_1, x_2]$ için $f(c_2)$, $[x_1, x_2]$ nın görüntü kümesinin <u>en küçük</u> elemanı,

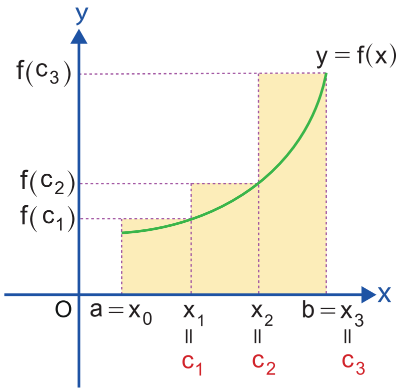
✓ $c_3 \in [x_2, x_3]$ için $f(c_3)$, $[x_2, x_3]$ nın görüntü kümesinin <u>en küçük</u> elemanı olmak üzere

Grafikteki eğrinin altında oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren

$$\Delta x_1 \cdot f(c_1) + \Delta x_2 \cdot f(c_2) + \Delta x_3 \cdot f(c_3)$$

toplamına $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ na ait bir **Riemann alt toplamı** denir. Burada $[a, b]$ 3 alt aralığa ayrılmıştır. Eğer $[a, b]$ daha fazla alt aralığa ayrılırsa bulunan Riemann alt toplamının değeri, eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

Riemann Üst Toplamı



✓ $c_1 \in [x_0, x_1]$ için $f(c_1)$, $[x_0, x_1]$ nın görüntü kümesinin <u>en büyük</u> elemanı,

✓ $c_2 \in [x_1, x_2]$ için $f(c_2)$, $[x_1, x_2]$ nın görüntü kümesinin <u>en büyük</u> elemanı,

✓ $c_3 \in [x_2, x_3]$ için $f(c_3)$, $[x_2, x_3]$ nın görüntü kümesinin <u>en büyük</u> elemanı olmak üzere

Grafikteki eğrinin üzerinde oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren

$$\Delta x_1 \cdot f(c_1) + \Delta x_2 \cdot f(c_2) + \Delta x_3 \cdot f(c_3)$$

toplamına $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ na ait bir **Riemann üst toplamı** denir. Burada $[a, b]$ 3 alt aralığa ayrılmıştır. Eğer $[a, b]$ daha fazla alt aralığa ayrılırsa bulunan Riemann üst toplamının değeri eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

Bir Fonksiyonun Belirli İntegrali ile Belirsiz İntegrali Arasındaki İlişki

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ nda sürekli ve $F'(x) = f(x)$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

(Bu işlemde c sabitleri sadeleşeceğinden belirli integralde c sabiti bulunmaz.)

olarak ifade edilir. Bu ifade integral hesabının temel teoremidir.

$\int_a^b f(x)\,dx$ integraline $f(x)$ fonksiyonunun **belirli integrali** denir.

Belirli İntegralin Özellikleri

$[a, b]$ nda integrallenebilir f ve g fonksiyonları için aşağıdaki özellikler vardır.

Özellik 1: Belirli integralde alt ve üst sınırlar eşit ise belirli integralin değeri sıfırdır.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Özellik 2: Belirli integralde alt ve üst sınırlar yer değiştirirse belirli integralin değeri işaret değiştirir.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Özellik 3: $a < c < b$ olmak üzere $\int_a^b f(x)\,dx$ integrali

aşağıdaki gibi iki integralin toplamı olarak ifade edilebilir.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Özellik 4: Bir fonksiyonun bir sabitle çarpımının belirli integrali, fonksiyonun belirli integralinin sabitle çarpımına eşittir.

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Özellik 5: İki fonksiyonun toplamının ya da farkının belirli integrali, belirli integrallerin toplamına ya da farkına eşit olur.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Parçalı Fonksiyonların Belirli İntegrali

$g(x)$ ve $h(x)$ integrallenebilir iki fonksiyon ve $a < c < b$ olmak üzere

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & , \quad x < c \quad \text{ise} \\ h(x) & , \quad x \geq c \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ ndaki integralini bulmak için integral, fonksiyonun kuralının değiştiği c noktasına göre

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\,dx} = \int_a^c \mathbf{g(x)\,dx} + \int_c^b \mathbf{h(x)\,dx}$$

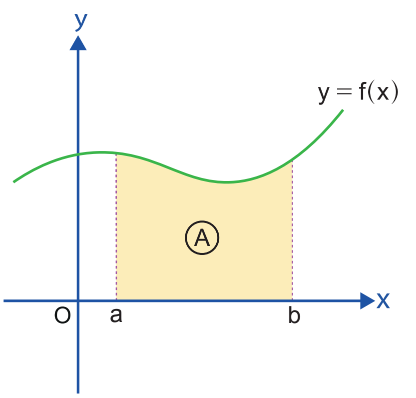
biçiminde iki integralin toplamı olarak yazılmalıdır.

Belirli İntegral ile Alan Hesabı

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonu integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı

$$\mathbf{A} = \int_a^b |\mathbf{f(x)}|\,\mathbf{dx}$$

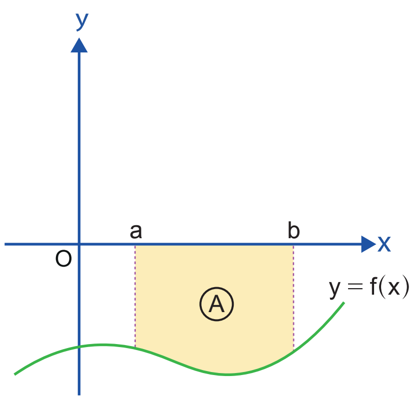
integrali ile hesaplanır.



$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ nda pozitif değerli ise yani $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı x ekseninin üzerinde kalıyorsa $|f(x)|=f(x)$ olacağından bu bölgenin alanı

$$\mathbf{A} = \int_a^b \mathbf{f(x)\,dx}$$

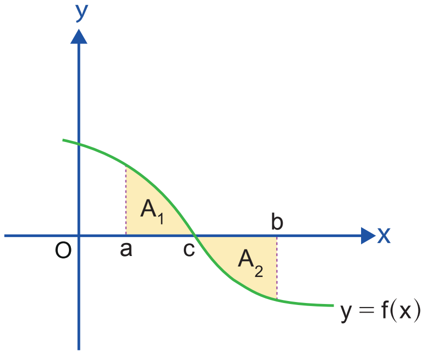
integrali ile hesaplanır.



$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ nda negatif değerli ise yani $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı x ekseninin altında kalıyorsa $|f(x)|=-f(x)$ olacağından bu bölgenin alanı

$$\mathbf{A} = -\int_a^b \mathbf{f(x)\,dx}$$

integrali ile hesaplanır.



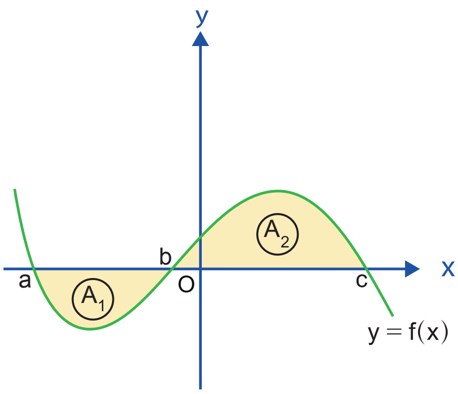
$y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ nda pozitif ve negatif değerlerin her ikisini de alıyorsa

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & , \quad a \le x \le c \ \text{ ise} \\ -f(x) & , \quad c < x \le b \ \text{ ise} \end{cases}$$

olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı

$$\mathbf{A = A_1 + A_2 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx}$$

integrali ile hesaplanır.



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve eksenler arasında kalan sınırlı bölgelerinin alanları A_1 ve A_2 olmak üzere

✓ $\int_a^c f(x)\,dx$ integralinin değeri

$$\mathbf{\int_a^c f(x)\,dx = -A_1 + A_2}$$

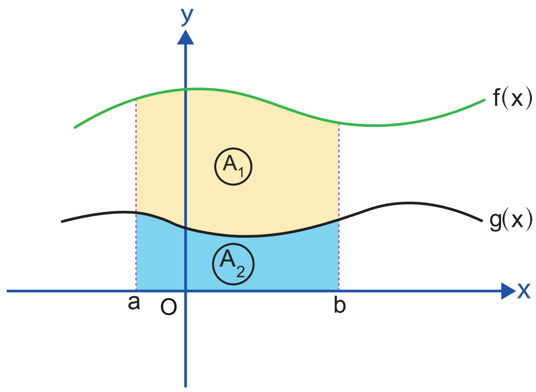
olur.

✓ $[a, c]$ nda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı

$$\mathbf{\int_a^c |f(x)|\,dx = A_1 + A_2}$$

olur.

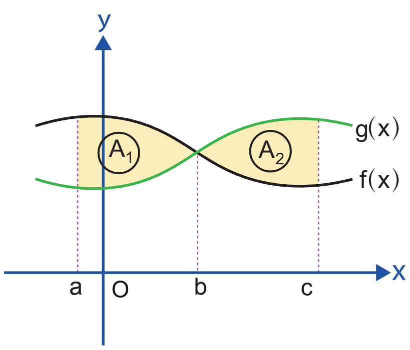
İki Fonksiyonun Grafiği Arasında Kalan Sınırlı Bölgenin Alanı



Yanda gösterilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan sınırlı bölgenin alanı A_1, $g(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı A_2 olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^b f(x)\,dx = A_1 + A_2 \\ \int_a^b g(x)\,dx = A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \mathbf{A_1 = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx} \quad \text{olur.}$$

Sonuç olarak $[a, b]$ nda iki fonksiyonun grafiği arasında kalan alanı bulmak için üstteki fonksiyonun denkleminden alttaki fonksiyonun denklemi çıkarılarak integrali alınır.



Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri yandaki gibi verilirse boyalı bölgelerin toplam alanı, A_1 ve A_2 alanlarının ayrı ayrı hesaplanarak toplanması ile bulunur.

$$\mathbf{A = A_1 + A_2 = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx + \int_b^c (g(x) - f(x))\,dx} \quad \text{olur.}$$