

5.1. LİMİT VE SÜREKLİLİK

BİR FONKSİYONUN BİR NOKTADAKİ LİMİTİ İLE SOLDAN VE SAĞDAN LİMİT KAVRAMLARI

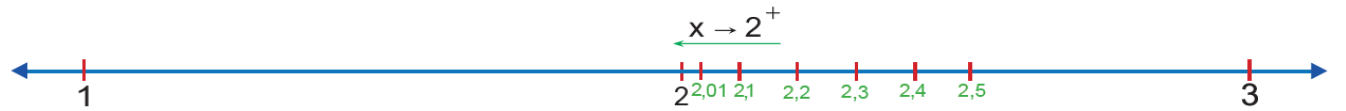
Yaklaşım Kavramı:

- ✓ x bağımsız değişkeni bir a gerçekte sayısına a dan küçük değerler ile artarak yaklaşıyorsa bu yaklaşım durumuna x in a ya soldan yaklaşımı denir ve $x \rightarrow a^-$ biçiminde gösterilir.



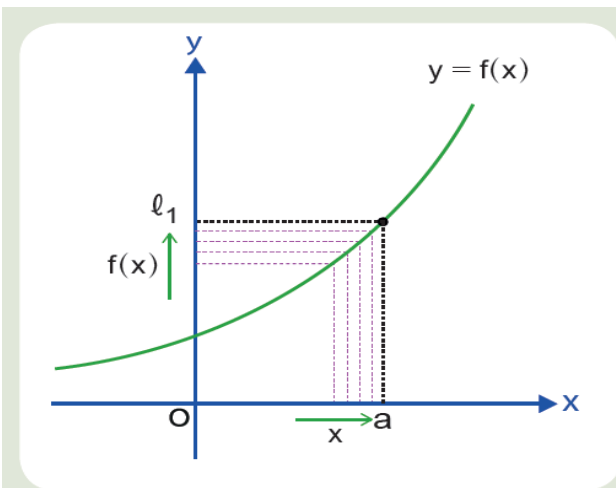
Yukarıdaki sayı doğrusunda 2 ye soldan yaklaşım gösterilmiştir. $x \rightarrow 2^-$ gösterimi x in 2 değerini almadığını ancak 2 den küçük 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 1,99; 1,999; ... değerler olarak 2 ye yaklaştığını ifade eder.

- ✓ x bağımsız değişkeni bir a gerçekte sayısına a dan büyük değerler ile azalarak yaklaşıyorsa bu yaklaşım durumuna x in a ya sağdan yaklaşımı denir ve $x \rightarrow a^+$ biçiminde gösterilir.



Yukarıdaki sayı doğrusunda 2 ye sağdan yaklaşım gösterilmiştir. $x \rightarrow 2^+$ gösterimi x in 2 değerini almadığını ancak 2 den büyük 2,5; 2,4; 2,3; 2,2; 2,1; 2,01; 2,001; ... değerler olarak 2 ye yaklaştığını ifade eder.

Limit Kavramı:

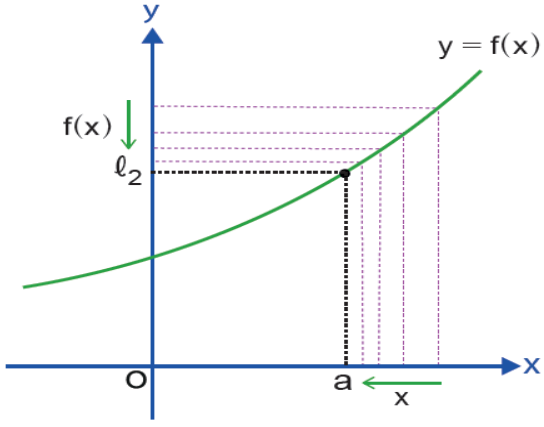


Yanda verilen $f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x , a ya soldan yaklaşırken $f(x)$ in l_1 gerçekte sayısına yaklaştığı görülmektedir.

l_1 gerçekte sayısına $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki **soldan limiti** denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_1$$

biçiminde gösterilir.

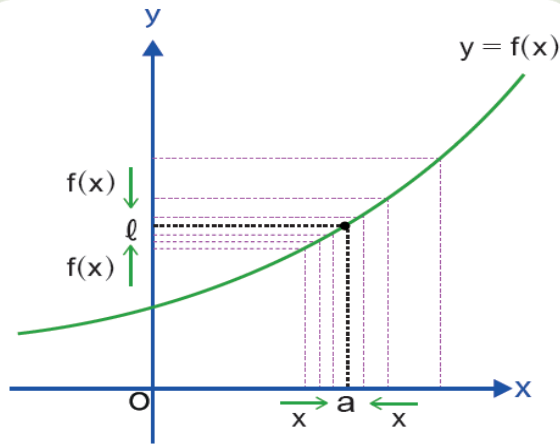


Yanda verilen $f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x , a ya sağdan yaklaşırken $f(x)$ in l_2 gerđek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

l_2 gerđek sayısına $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki **sağdan limiti** denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_2$$

biçiminde gösterilir.



Yanda verilen $f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x , a ya soldan ve sağdan yaklaşırken $f(x)$ in l gerđek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

l gerđek sayısına $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki **limiti** denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

biçiminde gösterilir.

✓ Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında limitinin olması için bu noktadaki sağdan ve soldan limitleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_1 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_2 \text{ olmak üzere } l_1 = l_2 = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ olur.}$$

✓ Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki sağdan ve soldan limitleri birbirine eşit değilse fonksiyonun bu noktada limiti yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ limiti yoktur.}$$

✓ Bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa bu limit tektir.

SONUC

Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için fonksiyonun o noktada tanımlı olma zorunluluğu yoktur.

Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, fonksiyonun o noktadaki değerinden farklı olabilir.

✓ Bir fonksiyonun grafiği üzerindeki kopukluk olan noktalara kritik noktalar denir. Bu noktalarda limit araştırılırken sağdan ve soldan limitler incelenmelidir. Eğer limit araştırılan nokta kritik nokta değilse fonksiyonun bu noktadaki limiti o noktadaki görüntüsüne eşittir.

✓ $x = a$ kritik nokta ve $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$ oluyorsa $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ olur.

✓ $x = b$ kritik nokta ve $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow b^+} f(x)$ oluyorsa $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ limiti yoktur.

✓ $x = c$ kritik nokta değilse $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ olur.

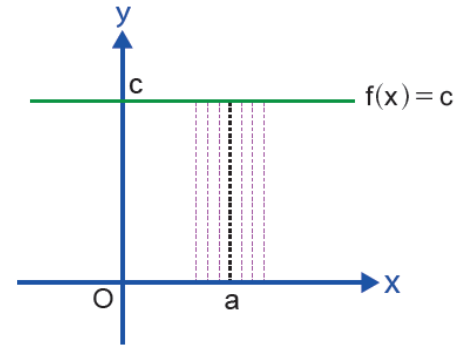
Limitin Özellikleri ve Uygulamaları

Özellik 1: $a, c \in \mathbb{R}$ ve $f(x) = c$ sabit fonksiyon

olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

olur.



Özellik 2: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

polinom fonksiyon olmak üzere her c gerçekte sayı için $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ olur.

Özellik 3: $f(x)$ ve $g(x)$, $x = a$ noktasında limitleri olan birer fonksiyon olmak üzere

I. Toplama kuralı

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(İki fonksiyonun toplamının limiti, limitlerinin toplamıdır.)

II. Fark kuralı

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(İki fonksiyonun farkının limiti, limitlerinin farkıdır.)

III. Çarpma kuralı

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(İki fonksiyonun çarpımının limiti, limitlerinin çarpımıdır.)

IV. Sabit ile çarpma kuralı

$$\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (k \in \mathbb{R})$$

(Bir fonksiyonun bir sabitle çarpımının limiti, fonksiyonun limitinin bu sabitle çarpımıdır.)

V. Bölme kuralı

$$g(x) \neq 0 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \text{ olmak üzere } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

(İki fonksiyonun bölümünün limiti, bölenin limitinin sıfır olmaması koşuluyla bu fonksiyonların limitlerinin bölümüdür.)

Özellik 4: $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında limiti olsun.

$$n \in \mathbb{Z} \text{ için } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n \text{ olur.}$$

(Bir $f(x)$ fonksiyonunun n . kuvvetinin limiti, limitinin n . kuvvetidir.)

Özellik 5: $y = f(x)$, $x = a$ noktasında limiti olan bir fonksiyon olmak üzere

I. n tek doğal sayı ise

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \text{ olur.}$$

II. n çift doğal sayı ise

$$f(x) \geq 0 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0 \text{ ise } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \text{ olur.}$$

Özellik 6: $y = f(x)$, $x = a$ noktasında limiti olan bir fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| \text{ olur.}$$

Özellik 7: $y = f(x)$, $x = a$ noktasında limiti olan bir fonksiyon olmak üzere c pozitif gerçektek sayı için

$$\lim_{x \rightarrow a} (c^{f(x)}) = c^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \text{ olur.}$$

Özellik 8: $y = f(x)$, $x = a$ noktasında limiti olan bir fonksiyon ve $f(x) > 0$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}^+, b \neq 1 \text{ ve } b \in \mathbb{R}^+ \text{ ise } \lim_{x \rightarrow a} (\log_b f(x)) = \log_b \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \text{ olur.}$$

Özellik 9: $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

I. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

II. $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$

III. $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$ $\left(a \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z} \right)$

IV. $\lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$ $\left(a \neq \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z} \right)$ olur.

Parçalı Fonksiyonların Limiti

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , x < a \text{ ise} \\ c & , x = a \text{ ise} \\ h(x) & , x > a \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı fonksiyonlar için

✓ $x = a$ noktası dışında bir noktanın limiti araştırılırken o nokta fonksiyonun hangi parçasına dahilse o parçada limit araştırılır.

$$m < a \text{ ise } \lim_{x \rightarrow m} f(x) = \lim_{x \rightarrow m} g(x) \text{ olur.}$$

$$n > a \text{ ise } \lim_{x \rightarrow n} f(x) = \lim_{x \rightarrow n} h(x) \text{ olur.}$$

✓ $x = a$ noktasında fonksiyonun kuralı değiştiğinden $x = a$ noktası kritik noktadır. Bu noktadaki limiti araştırılırken sağdan ve soldan limitleri incelenmelidir.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = l_1 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = l_2 \text{ olsun.}$$

$$l_1 = l_2 = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ olur.}$$

$$l_1 \neq l_2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ limiti yoktur.}$$

Limite Belirsizlik Durumları

Çarpanlarına ayrılabilen gerçekte sayılarda tanımlı $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ olması durumunda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği ortaya çıkar.

Burada $x = a$ için $f(a) = 0$ ve $g(a) = 0$ olduğundan her iki fonksiyonun da $(x - a)$ biçiminde çarpanı vardır.

Belirsizliği gidermek için pay ve payda çarpanlarına ayrılır. Pay ve paydadaki $(x - a)$ çarpanları sadeleştirilerek belirsizlik giderilir.

Bir Fonksiyonun Bir Noktadaki Sürekliliği

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ bir fonksiyon olsun. $a \in A$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $x = a$ noktasında **süreklidir** denir.

Bir başka ifadeyle $f(x)$ fonksiyonunun bir $x = a$ apsisli noktasındaki limitinin değeri o noktadaki görüntüsüne eşit oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.

Uyarı

Polinom fonksiyonların en geniş tanım kümesinin gerçek sayılar kümesi olduğu ve her noktadaki limitinin o noktadaki görüntüsüne eşit olduğu limit konusunda belirtilmişti. Bu durumda polinom fonksiyonlar her x gerçek sayısı için süreklidir.

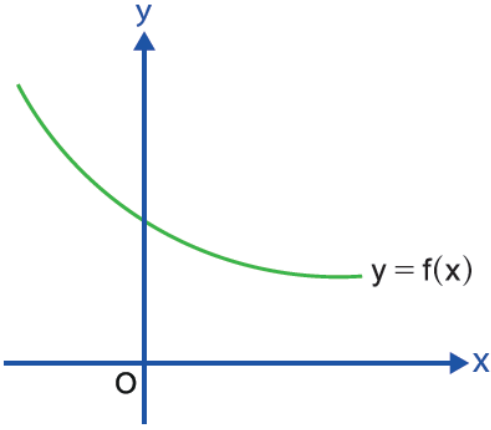
Uyarı

$f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom fonksiyon olmak üzere

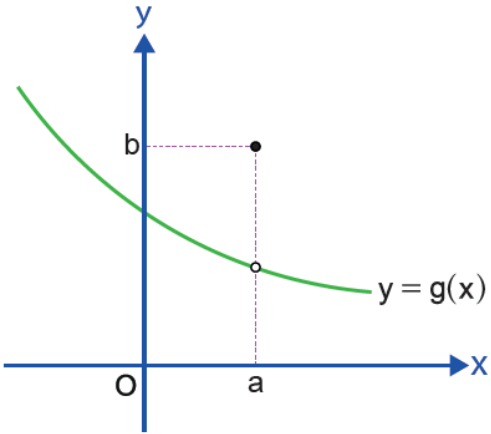
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

biçimindeki $h(x)$ fonksiyonları tanımlı oldukları en geniş kümede süreklidir.

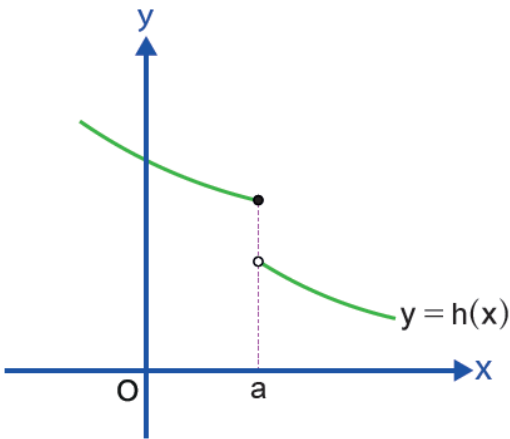
Bir Fonksiyonun Grafiği Üzerinde Sürekli ve Süreksiz Olduğu Noktalar



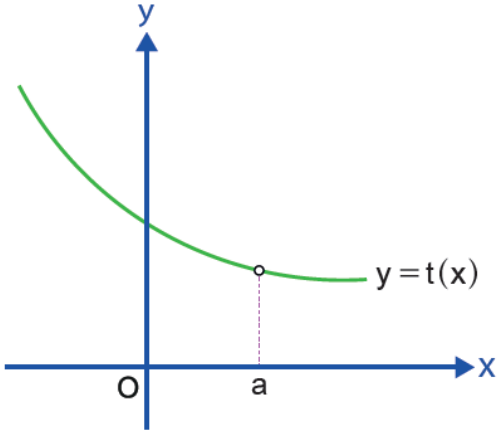
Yanda grafiği verilen f fonksiyonu her x gerçek sayısı için tanımlı ve her noktadaki limiti fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit olacağından fonksiyon her x gerçek sayısı için süreklidir. Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme \mathbb{R} olur.



Yanda grafiği verilen g fonksiyonu $x = a$ apsisli noktasında tanımlı ve limite sahip olmasına rağmen bu noktadaki limiti görüntüsüne eşit olmadığından g fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli değildir. Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{a\}$ olur.



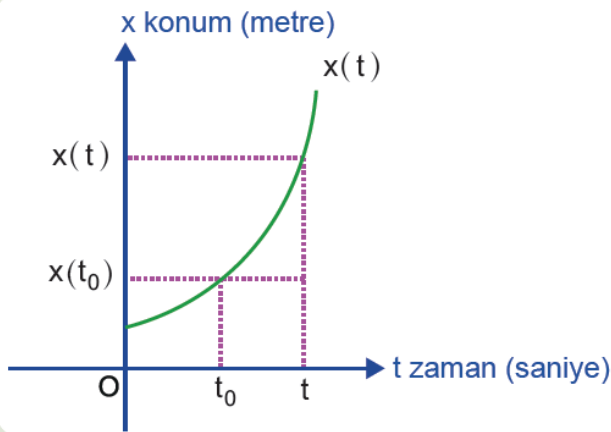
Yanda grafiği verilen h fonksiyonu $x = a$ apsisli noktasında tanımlı olmasına rağmen bu noktada limiti olmadığından fonksiyon $x = a$ apsisli noktasında sürekli değildir. Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{a\}$ olur.



Yanda grafiği verilen t fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada tanımlı olmadığından a değeri fonksiyonun sürekli olduğu en geniş kümenin bir elemanı olamaz. Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{a\}$ olur.

5.2. ANLIK DEĞİŞİM ORANI VE TÜREV

Türev Kavramı



Yanda doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği verilmiştir. Bu hareketlinin t_0 . ve t . saniyeler arasında ortalama hızı; bu hareketlinin konumundaki değişiminin, zamandaki değişime oranı ile hesaplanır.

✓ V_{ort} , bu hareketlinin t_0 . ve t . saniyeler arasındaki ortalama hızı

✓ Δx , konumdaki değişimi

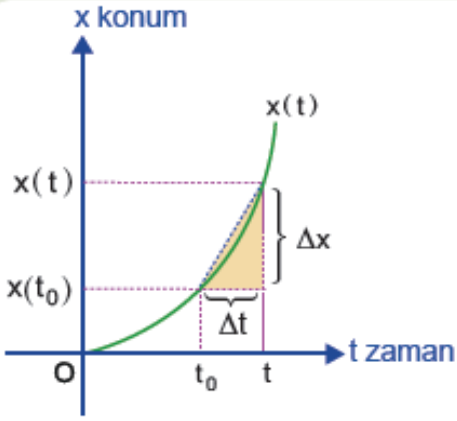
✓ Δt , zamandaki değişimi olmak üzere ortalama hız

$$V_{\text{ort}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \text{ olur.}$$

Burada Δx , x bağımlı (t ye bağlı) değişkenin değişimidir.
 Δt , t bağımsız değişkenin değişimidir.

Bu durumda $V_{\text{ort}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ifadesine **değişim oranı** denir.

Anlık Değişim Oranı ve Türev



Yanda doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği gösterilmiştir. Bu hareketlinin t. ve t₀. saniyeleri arasındaki ortalama hızının

$$V_{\text{ort}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

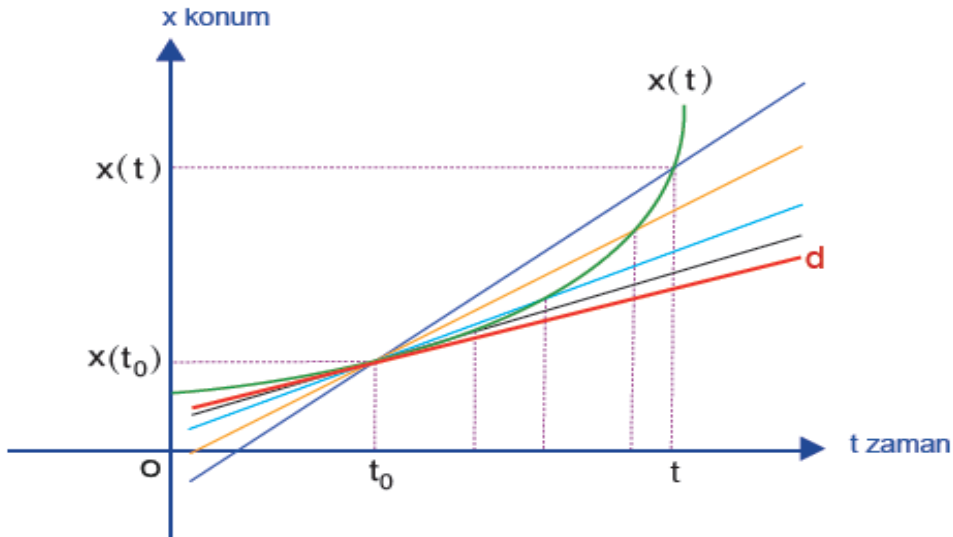
olduğu bilinmektedir.

Bu hareketlinin t₀ anındaki anlık hızı bulunmak istenirse t nin t₀ a yaklaşırken fonksiyonun değişim oranı hesaplanmalıdır. Bu oran

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

limiti ile hesaplanır. Bu limit değeri hareketlinin t₀ anındaki anlık hızı olup bu değer fonksiyonun t₀ anındaki **anlık değişim oranıdır**. Bir fonksiyonun anlık değişim oranına ise fonksiyonun t₀ noktasındaki **türevi** denir ve x'(t₀) ile gösterilir. O hâlde

$$x'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \text{ olur.}$$



x(t) fonksiyonunun t. ve t₀. zamanlar arasındaki değişim oranının (t, x(t)) ve (t₀, x(t₀)) noktalarından geçen doğrunun eğimi olduğu belirtilmişti. Yukarıdaki grafik incelendiğinde t, t₀ a yaklaşırken

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

limitinin değerinin eğrinin t₀ noktasındaki teğeti olan d doğrusunun eğimine eşit olduğu görülür. O hâlde bir fonksiyonun bir noktasındaki türevi, fonksiyonun o noktadaki teğetin eğimine eşittir.

Soldan ve Sağdan Türev

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limiti varsa bu limit değerine f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki **soldan türevi** denir ve $f'(a^-)$ ile gösterilir.

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limiti varsa bu limit değerine f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki **sağdan türevi** denir ve $f'(a^+)$ ile gösterilir.

Türev Tanımı

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için f sürekli olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limitine f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki **türevi** denir ve $f'(a)$ ile gösterilir.

Böylece f fonksiyonun $x = a$ noktasındaki türevi

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

biçiminde tanımlanır.

f fonksiyonun $x = a$ noktasındaki türevi olan $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ifadesinde

$x - a = h$ dönüşümü yapılırsa

$$x \rightarrow a \Rightarrow h \rightarrow 0$$

$x - a = h \Rightarrow x = a + h$ olur. Bu durumda f fonksiyonun $x = a$ noktasındaki türevi

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir $x = a$ apsisli noktasındaki türevi

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

olduğundan herhangi bir x noktasındaki türevi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

limiti ile bulunur. Burada $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ veya $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ olarak gösterilebilir.

$\frac{d}{dx}$ ifadesine **türev operatörü** denir.

Türev Alma Kuralları

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = c \text{ ise } f'(x) = 0 \text{ olur.}$$

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$$f(x) = a \cdot x^n \text{ ise } f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1} \text{ olur.}$$

Uyarı

$\frac{d}{dx}$ ifadesi türev operatörü olmak üzere

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}g(x) = \frac{dg(x)}{dx} = g'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' \text{ biçiminde gösterilir.}$$

Bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi olan $\frac{df(x)}{dx}$ için

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun **ikinci mertebeden türevi** denir ve $f''(x)$ ile gösterilir.

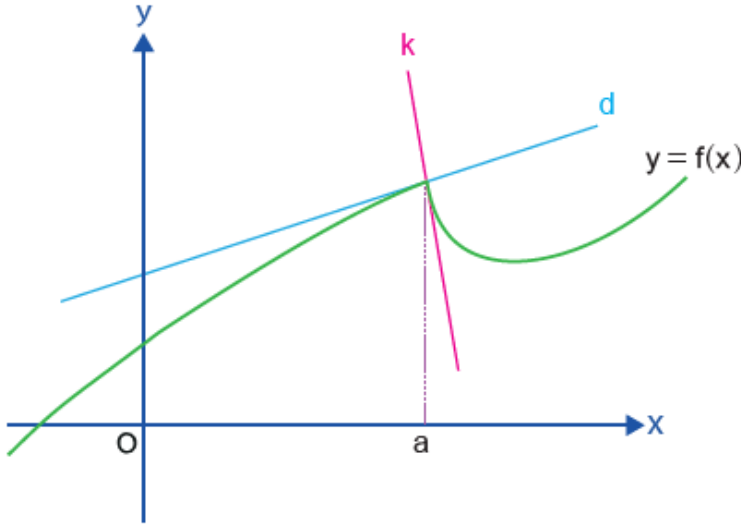
Bir Fonksiyonun Bir Nuktada ve Bir Aralıkta Türevlenebilirliği

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için f sürekli olmak üzere

Bir fonksiyonun $x = a$ noktasındaki sağdan ve soldan türevleri birbirine eşit ise bu fonksiyon $x = a$ noktasında türevlenebilirdir.

✓ $f'(a^+) = f'(a^-) = k \Rightarrow f'(a) = k$ olur.

✓ Bir f fonksiyonu (a, b) ndaki her noktada türevlenebilir ise bu fonksiyon (a, b) nda türevlenebilirdir.



Yanda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelenirse a ya soldan yaklaşırken eğriye çizilen teğetin d doğrusu ve a ya sağdan yaklaşırken çizilen teğetin k doğrusu olduğu görülür.

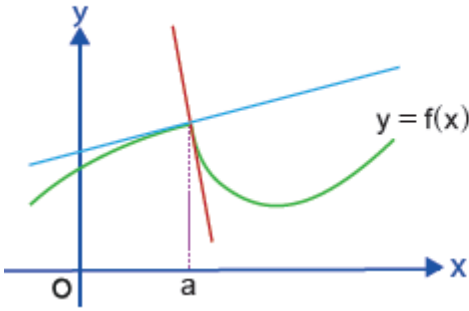
Bu durumda d doğrusunun eğimi m_d ve k doğrusunun eğimi m_k olarak ifade edilirse

$$f'(a^-) = m_d \text{ ve } f'(a^+) = m_k \text{ olur.}$$

Burada $m_d \neq m_k$ olduğundan fonksiyonun a noktasındaki sağdan ve soldan türevleri farklıdır.

O hâlde f fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasında türevi yoktur.

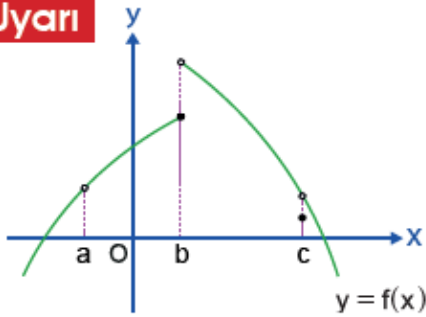
SONUÇ



f fonksiyonunun, $x = a$ apsisli noktasında sürekli olmsına rağmen bu noktada türevi yoktur. Bu tür noktalara fonksiyonun **kırılma noktaları** denir.

Bir fonksiyonun kırılma noktalarında türevi yoktur.

Uyarı



Yanda verilen $f(x)$ fonksiyonun grafiği incelendiğinde fonksiyonun tanımsız olduğu a, süreksiz olduğu b ve c apsisli noktalarda eğriye teğet çizilemeyeceği açıktır. Bir fonksiyonun bir noktadaki türevi fonksiyonun grafiğine o noktasında çizilen teğetin eğimine eşit olduğundan bu fonksiyonun a, b ve c noktalarında türevi yoktur.

SONUÇ

- ✓ Bir fonksiyon bir $x = a$ apsisli noktada tanımlı değilse $x = a$ apsisli noktada türevli de değildir.
- ✓ Bir fonksiyon bir $x = a$ apsisli noktada sürekli değilse $x = a$ apsisli noktada türevli de değildir.
- ✓ Bir fonksiyon türevli olduğu her noktasında süreklidir.

Türevlenebilen İki Fonksiyonun Toplamının, Farkının, Çarpımının ve Bölümünün Türevi

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

✓ $f(x) + g(x)$ fonksiyonunun türevi

✓ $f(x) - g(x)$ fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = (f(x) + g(x))' \\ = f'(x) + g'(x) \text{ olur.}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = (f(x) - g(x))' \\ = f'(x) - g'(x) \text{ olur.}$$

(İki fonksiyonun toplamının türevi
fonksiyonların türevlerinin toplamıdır.)

(İki fonksiyonun farkının türevi
fonksiyonların türevlerinin farkıdır.)

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

✓ $f(x) \cdot g(x)$ fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \text{ olur.}$$

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere

✓ $\frac{f(x)}{g(x)}$ fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2} \text{ olur.}$$

İki Fonksiyonun Bileşkesinin Türevi

f ve g türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere $y = (f \circ g)(x)$ bileşke fonksiyonu için

$$y = (f \circ g)(x) \Rightarrow y = f(g(x)) \text{ olur.}$$

Bu ifadede $u = g(x)$ dönüşümü yapılırsa $u = g(x)$ ve $y = f(u)$ olur.

$$\left. \begin{array}{l} y = f(u) \Rightarrow \frac{dy}{du} = f'(u) \\ u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \end{array} \right\} \text{ ifadeleri taraf tarafa çarpılırsa}$$

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \underbrace{f'(u)}_{f'(g(x))} \cdot g'(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ olur.}$$

O hâlde $y = (f \circ g)(x)$ bileşke fonksiyonunun türevi $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ olarak elde edilir.

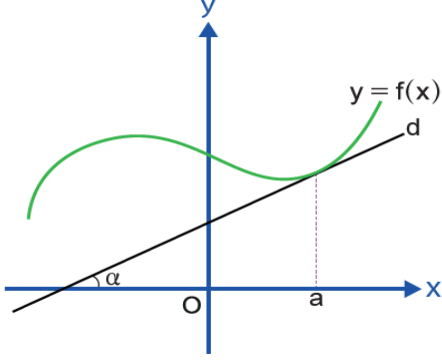
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ifadesine ise zincir kuralı denir.}$$

SONUÇ

$a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Q}$ ve $f(x)$ sıfırdan farklı türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$y = a \cdot [f(x)]^n \Rightarrow y' = a \cdot n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) \text{ olur.}$$

Bir Fonksiyonun Artan veya Azalan Olduğu Aralıklar



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve bu grafiğe $x = a$ apsisi noktasında çizilen teğeti olan d doğrusu verilmiştir. d doğrusu x eksenine pozitif yönde α radyanlık açı yapmaktadır.

f fonksiyonunun $x = a$ apsisi noktasındaki türevinin değeri, fonksiyona $x = a$ apsisi noktasında çizilen teğeti olan d doğrusunun eğimine eşittir. d doğrusunun eğimi m_t olmak üzere

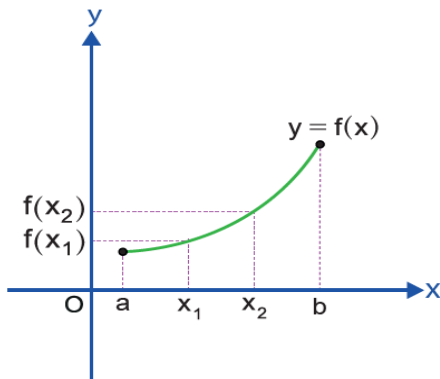
$$f'(a) = \tan \alpha = m_t \text{ olduğu biliniyor.}$$

Bu durumda

- ✓ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ise $\tan \alpha > 0$ olacağından $f'(a) > 0$ olur.
- ✓ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ise $\tan \alpha < 0$ olacağından $f'(a) < 0$ olur.

Sonuç olarak türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğinin üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin x eksenine pozitif yönde yaptığı açı;

- ✓ Dar açı ise teğetin eğimi pozitif ve teğet doğrusu sağa yatık olur.
- ✓ Geniş açı ise teğetin eğimi negatif ve teğet doğrusu sola yatık olur.

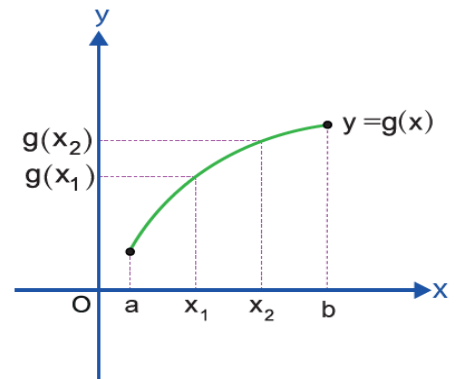


$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, olmak üzere

$\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ için

$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan

f fonksiyonu $[a, b]$ nda artandır.



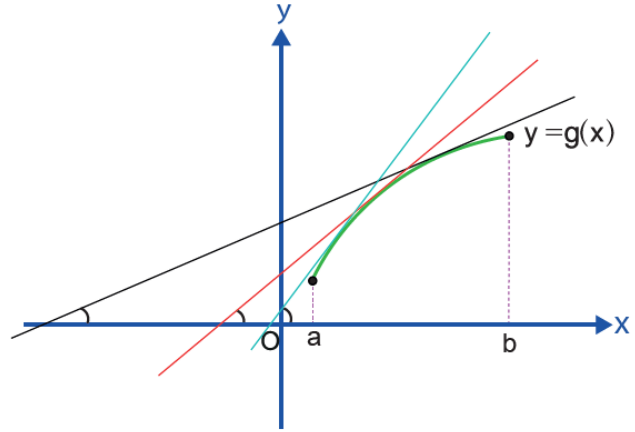
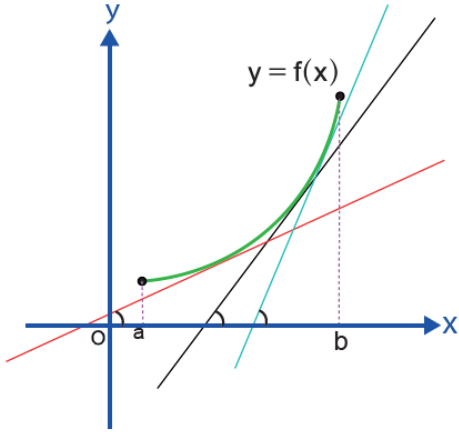
$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, olmak üzere

$\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ için

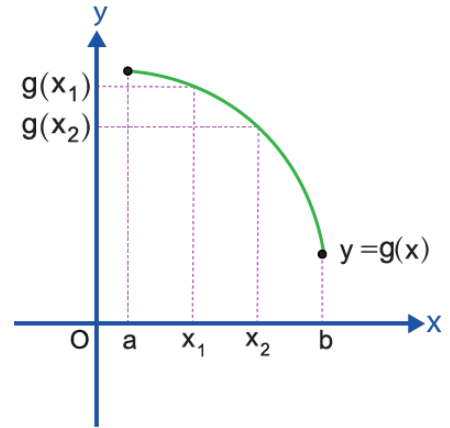
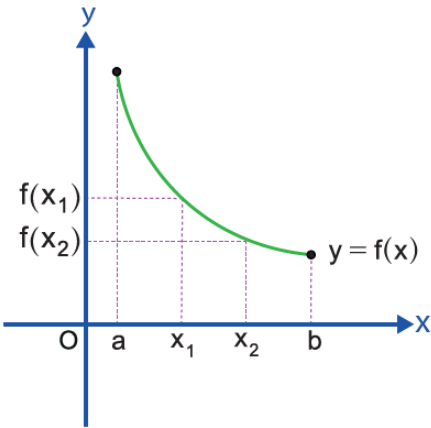
$x_1 < x_2$ iken $g(x_1) < g(x_2)$ olduğundan

g fonksiyonu $[a, b]$ nda artandır.

$[a, b]$ nda artan ve (a, b) nda türevlenebilen f ve g fonksiyonlarına (a, b) nda çizilen teğetleri incelenirse



$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarına (a, b) nda çizilen teğetlerinin x eksenine pozitif yönde dar açı yaptıkları görülmektedir. Bu durumda $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının (a, b) ndaki her noktada türevleri pozitiftir.



$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, olmak üzere

$\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ için

$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ olduğundan

f fonksiyonu $[a, b]$ nda azalandır.

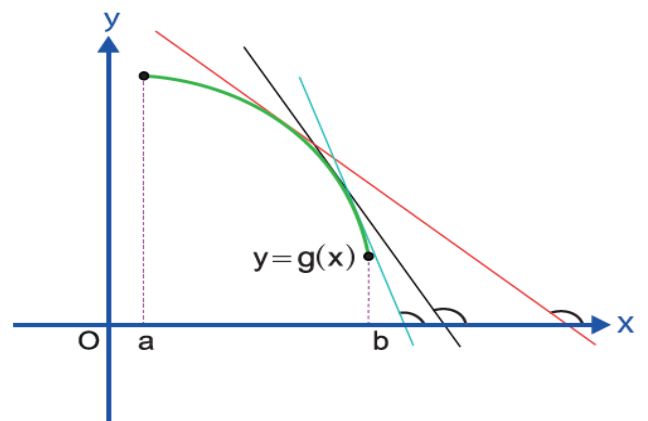
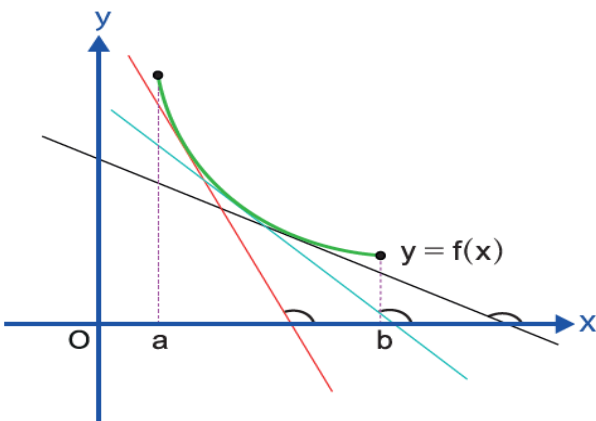
$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, olmak üzere

$\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ için

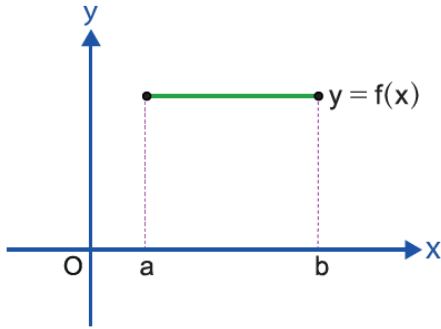
$x_1 < x_2$ iken $g(x_1) > g(x_2)$ olduğundan

g fonksiyonu $[a, b]$ nda azalandır.

$[a, b]$ nda azalan ve (a, b) nda türevlenebilen f ve g fonksiyonlarına (a, b) nda çizilen teğetleri incelenirse



$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarına (a, b) nda çizilen teğetlerinin x eksenini pozitif yönde geniş açtıkları görülmektedir. Bu durumda $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının (a, b) ndaki her noktada türevleri negatiftir.



$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, olmak üzere

$\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ için $f(x_1) = f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu $[a, b]$ nda sabit fonksiyondur.

$f(x)$ sabit fonksiyonunun (a, b) ndaki her noktada türevi sıfırdır.

SONUÇ

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve f , (a, b) nda türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

✓ $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ fonksiyonu $[a, b]$ nda artandır.

✓ $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ fonksiyonu $[a, b]$ nda azalandır.

✓ $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ fonksiyonu $[a, b]$ nda sabit fonksiyondur.

SONUÇ

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonu için $f'(x) = ax^2 + bx + c$ olmak üzere

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde

✓ $a > 0$ ve $\Delta \leq 0$ ise f fonksiyonu daima artandır.

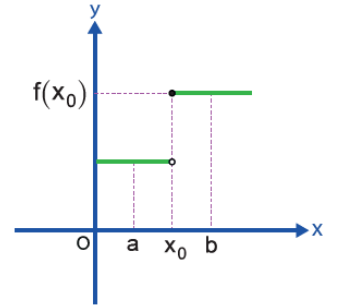
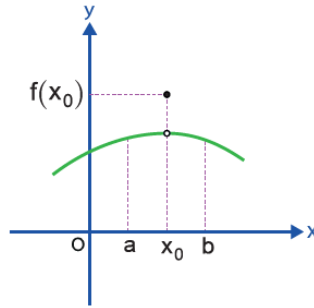
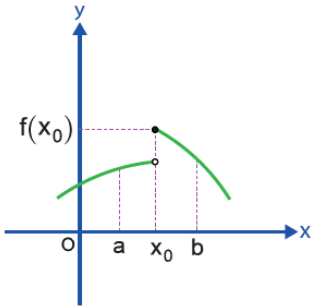
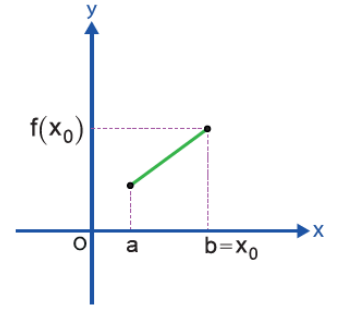
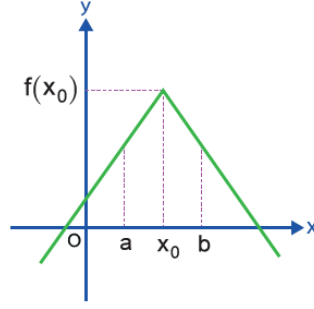
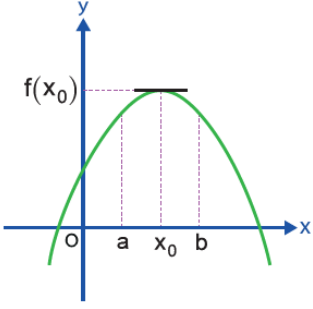
✓ $a < 0$ ve $\Delta \leq 0$ ise f fonksiyonu daima azalandır.

Bir Fonksiyonun Mutlak Maksimum ve Mutlak Minimum, Yerel Maksimum ve Yerel Minimum Noktaları

Yerel Maksimum ve Yerel Minimum Noktaları

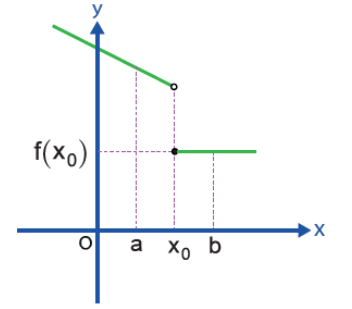
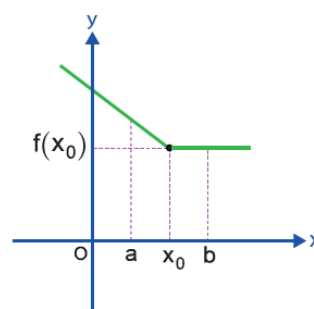
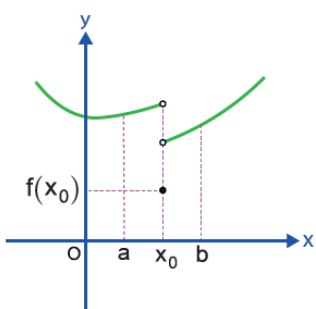
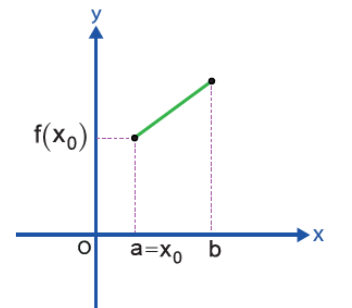
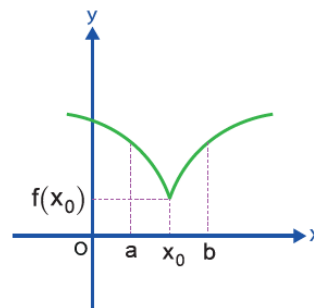
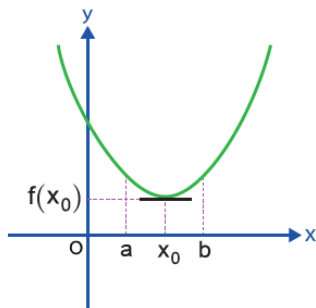
$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $(a, b) \subseteq A$ olmak üzere bir $x_0 \in (a, b)$ için fonksiyonun bu aralıktaki en büyük değeri $f(x_0)$ oluyorsa $(x_0, f(x_0))$ noktasına f fonksiyonunun bir **yerel maksimum noktası** denir.

Aşağıda grafiği verilen fonksiyonların $(x_0, f(x_0))$ noktaları yerel maksimum noktalarıdır.

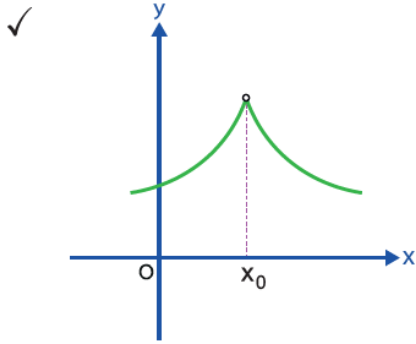


$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $(a, b) \subseteq A$ olmak üzere bir $x_0 \in (a, b)$ için fonksiyonun bu aralıktaki en küçük değeri $f(x_0)$ oluyorsa $(x_0, f(x_0))$ noktasına f fonksiyonunun bir **yerel minimum noktası** denir.

Aşağıda grafiği verilen fonksiyonların $(x_0, f(x_0))$ noktaları yerel minimum noktalarıdır.

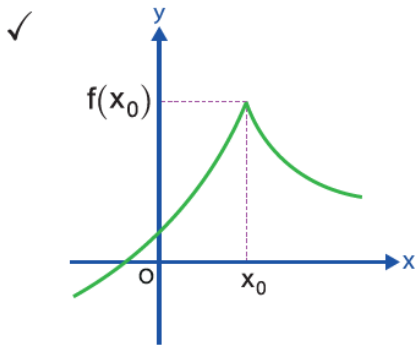


- ✓ Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına genel olarak **ekstremum noktaları** denir.
- ✓ Bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktaki en büyük değerini aldığı noktaya **mutlak maksimum noktası**, en büyük değerine ise **mutlak maksimum değeri** denir.
- ✓ Bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktaki en küçük değerini aldığı noktaya **mutlak minimum noktası**, en küçük değerine ise **mutlak minimum değeri** denir.



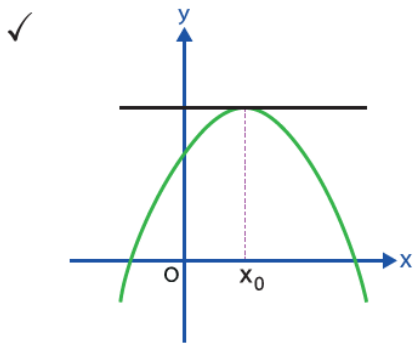
Bir fonksiyonun tanımlı olmadığı noktalarda ekstremum noktası yoktur.

Yanda grafiği verilen fonksiyonun x_0 apsisli noktasında ekstremum noktası yoktur.



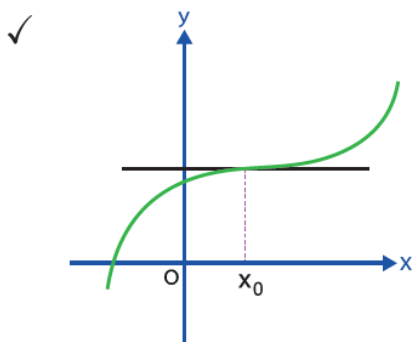
Bir fonksiyonun türevli olmadığı noktalar ekstremum noktaları olabilir.

Yanda grafiği verilen fonksiyonun x_0 noktası kırılma noktası olduğundan fonksiyonun x_0 noktasında türevi yoktur. Ancak fonksiyonun $(x_0, f(x_0))$ noktasında bir yerel maksimumumu vardır.



Türevlenebilir bir fonksiyonun ekstremum noktalarından çizilen teğeti x eksenine paralel olacağından bu teğetlerin eğimleri sıfırdır. Bu nedenle türevlenebilir bir fonksiyonun, ekstremum noktalarında türevleri sıfırdır.

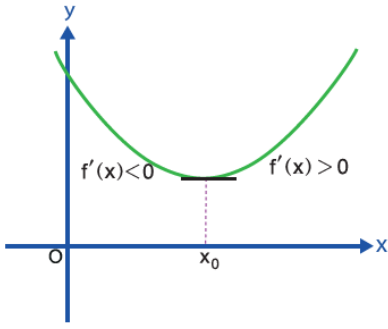
Yanda grafiği verilen fonksiyon x_0 apsisli noktasında bir ekstremum noktası vardır. Burada $f'(x_0) = 0$ olur.



Türevlenebilir bir fonksiyonun türevinin sıfır olduğu her nokta ekstremum noktası olmak zorunda değildir.

Yanda grafiği verilen fonksiyonun x_0 apsisli noktasındaki teğetin eğimi sıfır ($f'(x_0) = 0$) olmasına rağmen bu nokta ekstremum noktası değildir.

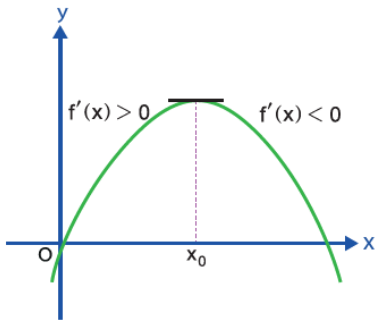
- ✓ Bir fonksiyonun türevinin sıfır olduğu noktanın ekstremum noktası olabilmesi için fonksiyonun türevinin o noktada işaret değiştirmesi gerekir.



Yanda grafiği verilen fonksiyonun türevi, x_0 noktasının solunda negatif, sağında pozitif olduğundan fonksiyonun x_0 noktasında bir yerel minimumu vardır.

Bir başka ifadeyle fonksiyonun x_0 noktasının solunda azalan sağında artan olduğu görülmektedir.

Bir fonksiyonun azalanlıktan artanlığa geçtiği noktaya **yerel minimum noktası** denir.



Yanda grafiği verilen fonksiyonun türevi, x_0 noktasının solunda pozitif, sağında negatif olduğundan fonksiyonun x_0 noktasında bir yerel maksimumu vardır.

Bir başka ifadeyle fonksiyonun x_0 noktasının solunda artan sağında azalan olduğu görülmektedir.

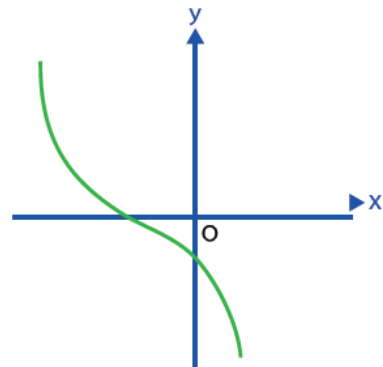
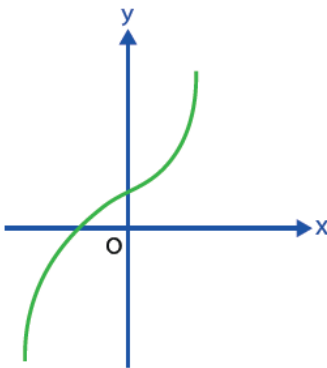
Bir fonksiyonun artanlıktan azalanlığa geçtiği noktaya **yerel maksimum noktası** denir.

SONUÇ

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ polinom fonksiyon olmak üzere

- ✓ $f'(x) = 0$ denkleminin kökü yoksa ya da yalnızca çift katlı kökü varsa $f(x)$ fonksiyonu daima artan ya da daima azalan olur. Daima artan ya da daima azalan fonksiyonların ekstremum noktaları yoktur.

✓



Yukarıda daima artan ve daima azalan fonksiyonların grafiklerine örnek verilmiştir. Grafikler incelendiğinde ekstremum noktası olmayan yani daima artan ve daima azalan fonksiyonların bire bir ve örten olduğu görülür.

Türev Yardımıyla Bir Fonksiyonun Grafiğinin Çizimi

- ✓ Bir fonksiyonun grafiği çizilirken tanım kümesine dikkat edilmelidir. Bu bölümde yalnızca polinom fonksiyonların grafikleri çizileceğinden polinom fonksiyonların en geniş tanım kümesi olan gerçel sayılar kümesinde grafik çizimi yapılacaktır.
- ✓ Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalara bakılmalıdır. $f(x) = 0$ denkleminin tek katlı köklerinde grafik x eksenini keserken çift katlı köklerinde x eksenine teğet olacaktır.
- ✓ Fonksiyonun türevi yardımıyla varsa ekstremum noktaları bulunmalı ve artan ile azalanlık durumları incelenmelidir.

✓ $y = mx + n$ biçiminde verilen bir doğrunun eğimi m dir.

✓ $ax + by + c = 0$ biçiminde verilen bir doğrunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ olur.

✓ Grafiği verilen bir doğrunun eğimi, bu doğrunun x eksenine pozitif yönde yaptığı açı α olmak üzere $m = \tan \alpha$ olur.

✓ $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olur.

✓ d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri sırasıyla m_1 ve m_2 olmak üzere
 $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ ve $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ olur.

✓ $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi
 $y - y_0 = m(x - x_0)$ olur.

Maksimum ve Minimum Problemleri

Maksimum ve minimum problemlerinde en büyük ya da en küçük olması istenen değeri tek değişkene bağlı bir fonksiyon olarak ifade ettikten sonra bu fonksiyonun maksimum ya da minimum değeri araştırılır.