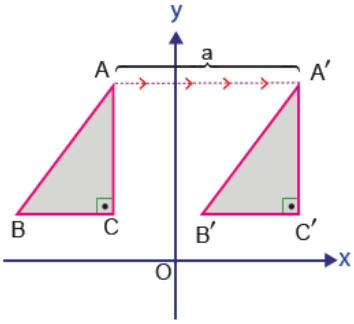
4.1. ANALİTİK DÜZLEMDE TEMEL DÖNÜŞÜMLER

4.1.1. Analitik Düzlemde Koordinatları Verilen Bir Noktanın Öteleme, Dönme ve Simetri Dönüşümleri

HATIRLATMA

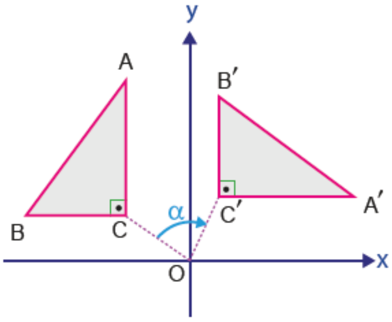
Analitik düzlemde temel dönüşümler öteleme, dönme ve simetri dönüşümleridir. Aşağıda analitik düzlemde verilen bir dik üçgenin x eksenine göre öteleme, orijine göre negatif yönde (saatin dönme yönünde) dönme ve y eksenine göre simetri dönüşümleri verilmiştir.

Öteleme Dönüşümü



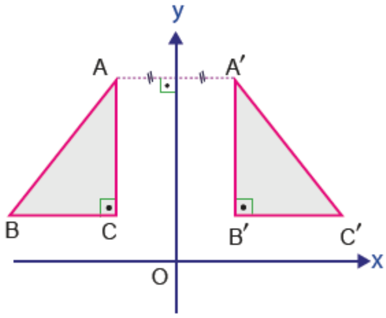
ABC üçgeninin x ekseni boyunca pozitif yönde a birim ötelenmesiyle şekildeki A′B′C′ dik üçgeni elde edilir.

Dönme Dönüşümü



ABC üçgeninin orijine göre negatif yönde (saatin dönme yönünde) α açısı kadar dönmesiyle şekildeki A′B′C′ dik üçgeni elde edilir.

Simetri Dönüşümü

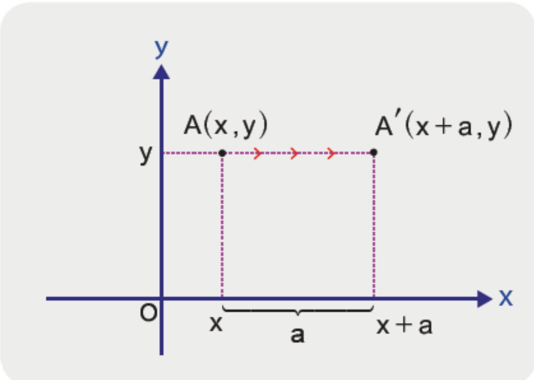


ABC üçgeninin y eksenine göre simetriği alınarak şekildeki A′B′C′ dik üçgeni elde edilir.

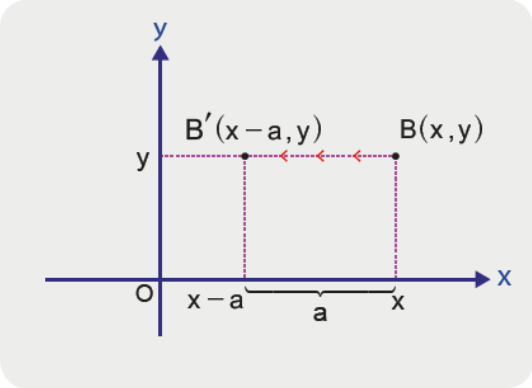
Öteleme Dönüşümü

Analitik düzlemde verilen bir noktanın belli bir doğrultuda ve belli bir yönde yer değiştirmesine **öteleme** denir. Koordinat sisteminde x ekseni boyunca ötelenen nokta x eksenine paralel olarak hareket eder. Bu noktanın apsisi değişirken ordinatı değişmez. Koordinat düzleminde y ekseni boyunca ötelenen nokta ise y eksenine paralel olarak hareket eder. Bu durumda noktanın ordinatı değişirken apsisi değişmez.

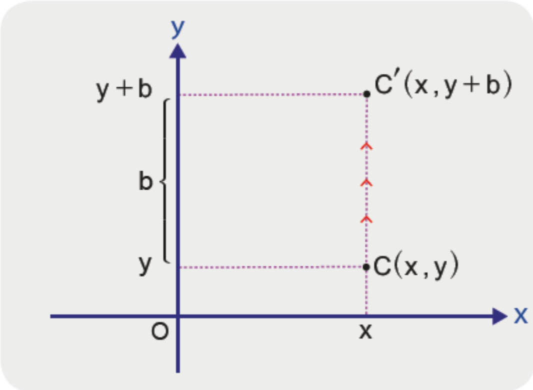
Analitik düzlemde $A(x, y)$ noktası x ekseni boyunca pozitif yönde (sağa doğru) a birim ötelendiğinde A noktasının apsisi a birim artarken ordinatı değişmez. Böylece $A(x, y)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde a birim ötelenmesiyle $\mathbf{A'(x+a, y)}$ noktası elde edilir.



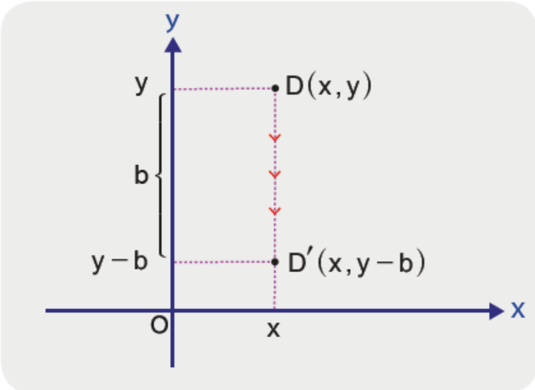
Analitik düzlemde $B(x,y)$ noktası x ekseni boyunca negatif yönde (sola doğru) a birim ötelendiğinde B noktasının apsisi a birim azalırken ordinatı değişmez. Böylece $B(x,y)$ noktasının x ekseni boyunca negatif yönde a birim ötelenmesiyle $\mathbf{B'(x-a,y)}$ noktası elde edilir.



Analitik düzlemde $C(x,y)$ noktası y ekseni boyunca pozitif yönde (yukarı doğru) b birim ötelendiğinde C noktasının ordinatı b birim artarken apsisi değişmez. Böylece $C(x,y)$ noktasının y ekseni boyunca pozitif yönde b birim ötelenmesiyle $\mathbf{C'(x,y+b)}$ noktası elde edilir.



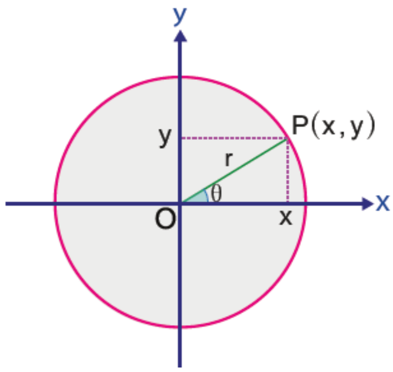
Analitik düzlemde $D(x,y)$ noktası y ekseni boyunca negatif yönde (aşağı doğru) b birim ötelendiğinde D noktasının ordinatı b birim azalırken apsisi değişmez. Böylece $D(x,y)$ noktasının y ekseni boyunca pozitif yönde b birim ötelenmesiyle $\mathbf{D'(x,y-b)}$ noktası elde edilir.



Dönme Dönüşümü

Düzlemde bir P noktasının koordinatları (x, y), $[OP]$ nın x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı θ ve $|OP| = r$ olmak üzere P noktasının koordinatları

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\theta \\ y &= r \cdot \sin\theta \end{aligned}\right\} \text{olur.}$$

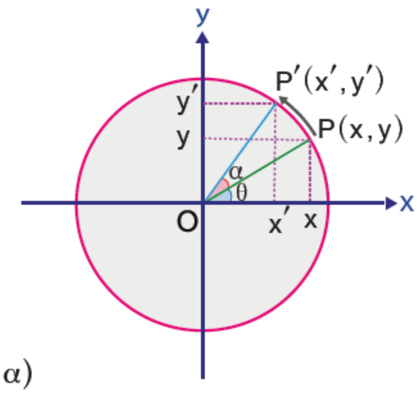


P noktasının, O (orijin) etrafında pozitif yönde α açısı kadar döndürülmesi ile elde edilen noktanın koordinatları

$$\left.\begin{aligned} x' &= r \cdot \cos(\theta + \alpha) \\ y' &= r \cdot \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}\right\} \text{olur. Buna göre}$$

$$\begin{aligned} x' &= r \cdot (\cos\theta \cdot \cos\alpha - \sin\theta \cdot \sin\alpha) \\ &= \underbrace{r \cdot \cos\theta}_{x} \cdot \cos\alpha - \underbrace{r \cdot \sin\theta}_{y} \cdot \sin\alpha \\ &= x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\ y' &= r \cdot (\sin\theta \cdot \cos\alpha + \cos\theta \cdot \sin\alpha) \\ &= \underbrace{r \cdot \sin\theta}_{y} \cdot \cos\alpha + \underbrace{r \cdot \cos\theta}_{x} \cdot \sin\alpha \\ &= y \cdot \cos\alpha + x \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece



P noktasının orijin etrafında pozitif yönde α açısı kadar döndürülmesi ile elde edilen P' noktası

$$\mathbf{P'(x', y') = R_\alpha(P) = (x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha,\ x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha)}$$

olur. Burada α açısına **dönme açısı** denir. α açısı kadar dönme dönüşümü $\mathbf{R_\alpha}$ ile gösterilir.

SONUÇ

Herhangi bir (x, y) noktası orijin etrafında pozitif yönde $90°$, $180°$, $270°$ ve $360°$ döndürüldüğünde aşağıdaki noktalar elde edilir.

- $\mathbf{R_{90°}(x, y) = (-y, x)}$
- $\mathbf{R_{270°}(x, y) = (y, -x)}$
- $\mathbf{R_{180°}(x, y) = (-x, -y)}$
- $\mathbf{R_{360°}(x, y) = (x, y)}$

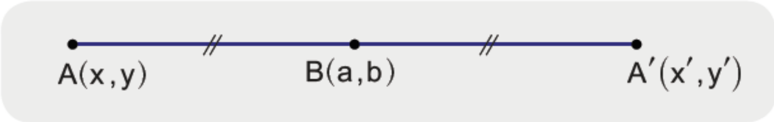
Dönme Merkezi

Dönme dönüşümü, düzlemde bir nokta dışındaki tüm noktaları değiştirir. Dönme dönüşümünün değiştirmediği bu noktaya **dönme merkezi** denir. Burada sadece orijin etrafında dönmeden bahsedildiği için dönme merkezi orijin olarak alınacaktır.

Simetri Dönüşümü

Bir noktanın Başka bir Noktaya Göre Simetriği

$A(x,y)$ noktasının $B(a,b)$ noktasına göre simetriği $A'(x',y')$ olsun.



B noktası $[AA']$ nın orta noktası olduğundan $B(a,b)=B\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2}\right)$ olur.

$$B\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2}\right)=B(a,b)\Rightarrow\frac{x+x'}{2}=a \text{ ve } \frac{y+y'}{2}=b$$

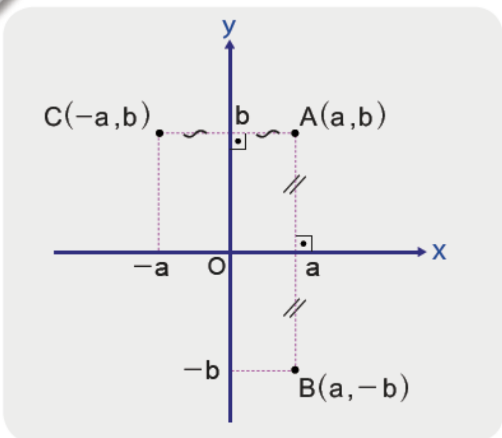
$$\Rightarrow x'=2a-x \text{ ve } y'=2b-y \text{ bulunur.}$$

Böylece $A(x,y)$ noktasının $B(a,b)$ noktasına göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü olan $A'(x',y')$ noktasının koordinatları $\mathbf{A'(2a-x,2b-y)}$ olur.

SONUÇ

$A(x,y)$ noktasının $O(0,0)$ noktasına (orijin) göre simetriği $\mathbf{A'(-x,-y)}$ noktasıdır.

Bir Noktanın x ve y Eksenlerine Göre Simetriği



$A(a,b)$ noktasının

✓ x eksenine göre simetriği $\mathbf{B(a,-b)}$ dir.

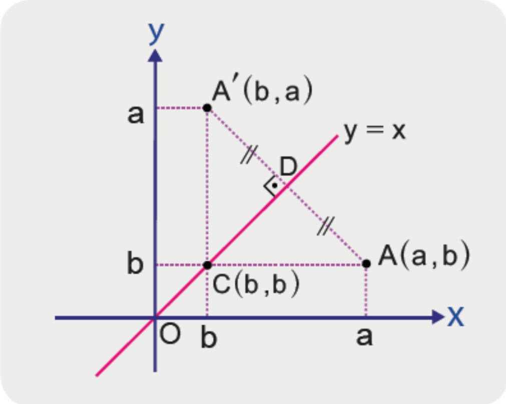
✓ y eksenine göre simetriği $\mathbf{C(-a,b)}$ dir.

Bir Noktanın $y = x$ Doğrusuna Göre Simetriği

A noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği A' noktası ise $[AA']$, $y = x$ doğrusuna dik ve $|AD| = |DA'|$ olmalıdır.

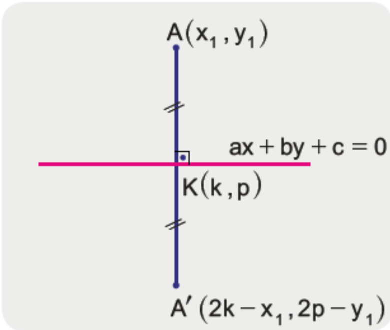
C noktası $y = x$ doğrusu üzerinde olduğundan $C(b, b)$ olur. ACA' üçgeninde kenarortay aynı zamanda yükseklik olduğundan ACA' üçgeni ikizkenar dik üçgendir. Buna göre $|AC| = |A'C| = a - b$ bulunur.

Buradan $A(a, b)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği $\mathbf{A'(b, a)}$ noktası olarak elde edilir.



Bir Noktanın Bir Doğruya Göre Simetriği

Bir $A(x_1, y_1)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna göre simetriğini bulmak için aşağıdaki adımlar sırasıyla uygulanır.



✓ Doğrunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ bulunur.

✓ $[AA']$ ile $ax + by + c = 0$ doğrusu birbirine dik olduğundan $[AA']$ nın eğimi $m = \frac{b}{a}$ olur.

✓ Eğimi $m = \frac{b}{a}$ olan ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen AA' doğrusunun denklemi $y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$ ifadesinden elde edilir.

✓ $ax + by + c = 0$ doğrusunun denklemi ile yeni bulunan AA' doğrusunun denklemi ortak çözülerek $K(k, p)$ kesim noktası bulunur.

✓ $A(x_1, y_1)$ noktasının $K(k, p)$ noktasına göre simetriği alınarak $\mathbf{A'(2k - x_1, 2p - y_1)}$ noktası elde edilir.

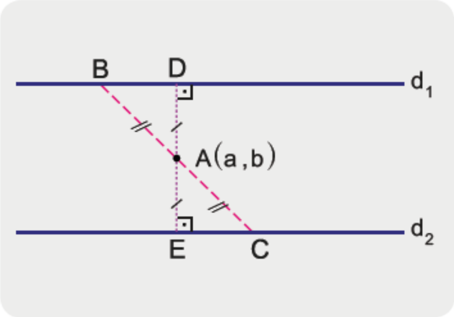
Bu nokta $A(x_1, y_1)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna göre simetriği olan noktadır.

Bir Doğrunun Bir Noktaya Göre Simetriği

d_1 doğrusunun A noktasına göre simetriği d_2 doğrusu ise $d_1 \parallel d_2$, $|AD| = |AE|$ ve $|AB| = |AC|$ olur.

d_1 doğrusu üzerindeki bir $B(x, y)$ noktasının $A(a, b)$ noktasına göre simetriği olan $C(2a - x, 2b - y)$ noktası d_2 doğrusu üzerindedir.

d_2 doğrusunun denklemini bulmak için d_1 doğrusunun denkleminde **x** yerine **2a − x** ve **y** yerine **2b − y** yazılarak d_1 doğrusunun A noktasına göre simetriği olan d_2 doğrusu elde edilir.



4.1.2. Temel Dönüşümlerin Bileşkeleri ve Bu Bileşkeleri İçeren Uygulamalar

Ötelemeli Dönme Dönüşümü

Öteleme ve dönme dönüşümünün birlikte uygulandığı dönüşümlere **ötelemeli dönme dönüşümü** denir. Ötelemeli dönme dönüşümleri uygulanan şekillerde herhangi iki nokta arasındaki uzaklık değişmez ve şekillerin üzerindeki açıların ölçüleri de aynı kalır.

Ötelemeli Simetri Dönüşümü

Öteleme ve simetri dönüşümlerinin birlikte uygulandığı dönüşümlere **ötelemeli simetri dönüşümü** denir. Ötelemeli simetri dönüşümleri uygulanan şekillerde uzaklıklar değişmez. Şeklin üzerindeki açıların yönleri değişir.