10.1. SAYMA VE OLASILIK

10.1.1. Sıralama ve Seçme

10.1.1.1. Toplama ve Çarpma Yöntemlerini Kullanarak Sayma

Bilgi

Bir kümenin elemanlarını, pozitif tam sayılar kümesinin elemanları ile sıralı olarak bire bir eşleyerek bulma işlemine **bire bir eşleme yoluyla sayma** denir.

Bilgi

Sonlu ve ayrık kümelerin birleşiminin eleman sayısını bulmak için bu kümelerin eleman sayıları toplanır. Bu yöntemle saymaya **toplama yoluyla sayma** denir. A ile B sonlu ve ayrık iki küme olmak üzere $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olur.

Bilgi

$A \times B$ kümesinin elemanları olan (x, y) sıralı ikililerinin sayısı $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ olmak üzere $m \cdot n$ adet olur. Sıralı ikililerin sayısını bu şekilde bulma işlemine **çarpma yoluyla sayma** denir.

Saymanın Temel İlkesi

İpucu

k tane olayın gerçekleştiği bir olaylar dizisinde birinci olay n_1 farklı biçimde, ikinci olay n_2 farklı biçimde ve bu şekilde devam edildiğinde k ninci olay n_k farklı biçimde gerçekleşiyorsa bu olayların tamamı $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$ çarpımı kadar farklı biçimde gerçekleşir.

Faktöriyel

Bilgi

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere 1 den n ye kadar olan ardışık tam sayıların çarpımına **n faktöriyel** (çarpansal) denir ve $n!$ ile gösterilir. Buna göre

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ olur.
- $0! = 1$ ve $1! = 1$ olarak kabul edilir.

İpucu

Birbirinden farklı n tane nesne yan yana $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ farklı şekilde sıralanabilir.

10.1.1.2. Permütasyon (Sıralama)

Bilgi

n ve r birer doğal sayı ve $r \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin birbirinden farklı r tane elemanından oluşan dizilişlerin her birine **n nin r li bir permütasyonu** denir. Permütasyon sayısı ile farklı dizilişlerin sayısı kastedilir.

İpucu

n elemanlı bir kümenin r li permütasyonlarının sayısı $P(n, r)$ ile gösterilir ve $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ ile hesaplanır.

- $P(n, 0) = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$ olur.
- $P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ olur (n tane farklı elemanın yan yana diziliş sayısıdır.).

10.1.1.3. Tekrarlı Permütasyon

İpucu

$n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_r = n$ olmak üzere n tane nesnenin

n_1 tanesi özdeş (aynı büyüklük ve özellikte), n_2 tanesi özdeş, ..., n_r tanesi özdeş ise bu n tane nesnenin farklı permütasyonlarının sayısı $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot ... \cdot n_r!}$ ile bulunur.

10.1.1.4. Kombinasyon (Seçim)

Bilgi

A kümesinin r elemanlı alt kümelerinin her birine **A kümesinin r li kombinasyonu** denir.

$n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı (kısaca r li) kombinasyonlarının sayısı C(n, r) ya da $\binom{n}{r}$ ile gösterilir. $C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ olur.

Kombinasyon sayısı ile farklı gruplamaların sayısı kastedilir.

Kombinasyon sayısının hesaplanmasında kümenin elemanlarının sıralama sayısı değil bu elemanların seçilebilme sayısı önemlidir.

İpucu

$n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı permütasyonlarının sayısı ile r elemanlı kombinasyonlarının sayısı arasında $P(n, r) = C(n, r) \cdot r!$ eşitliği vardır.

İpucu

n elemanlı bir kümenin 0 elemanlı alt küme sayısı, $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$

n elemanlı bir kümenin n elemanlı alt küme sayısı, $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \dfrac{n!}{n! \cdot 1} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$

n elemanlı bir kümenin 1 elemanlı alt küme sayısı, $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \dfrac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n \quad (n \in \mathbb{N} \text{ ve } n \geq 1)$

İpucu

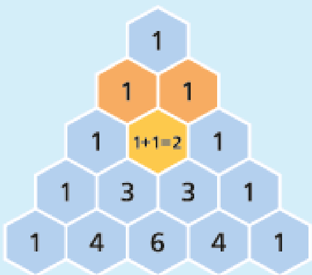
$n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ olmak üzere $C(n, r) = C(n, n-r)$ eşitliği vardır.

İpucu

n, bir kümenin eleman sayısı olmak üzere $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ olur.

10.1.1.5. Pascal Üçgeni

Bilgi



Yandaki şekilde görüldüğü gibi

- Pascal (Paskal) üçgeninin tepesinde 1 sayısı bulunmaktadır.
- Her satırdaki eleman sayısı bir önceki satırdaki eleman sayısından 1 fazladır.
- Her satır 1 ile başlayıp 1 ile biter. Diğer sayılar ise bir üst satırdaki kendine komşu olan iki sayının toplamıdır.
- Pascal üçgenindeki her satır verilen bu örüntüye bağlı kalarak devam eder.

10.1.1.6. Binom Açılımı

Bilgi

$x+y \neq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x+y)^n$ ifadesinin

$$(x+y)^n = \underbrace{\binom{n}{0} \cdot x^{n-0} \cdot y^0}_{1.\ \text{terim}} + \underbrace{\binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot y^1}_{2.\ \text{terim}} + \underbrace{\binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot y^2}_{3.\ \text{terim}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n} \cdot x^{n-n} \cdot y^n}_{(n+1).\ \text{terim}}$$

şeklindeki açılımına **binom açılımı** denir.
Baştan $(r+1)$. terim aynı zamanda sondan $(n-r+1)$. terimdir $(r \leq n$ ve $r \in \mathbb{N})$.

(Bu açılım x in azalan, y nin artan kuvvetlerine göre yapılmıştır.)

İpucu

$(x+y)^n$ ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açıldığında baştan $(r+1)$. terim $\binom{n}{r} \cdot x^{n-r} \cdot y^r$ olur.

İpucu

$x+y \neq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x+y)^n$ ifadesinin açılımında

- $(n+1)$ tane terim vardır.
- Her bir terimdeki x ve y değişkenlerinin üsleri toplamı n dir.
- Katsayılar toplamını bulmak için değişkenler yerine 1 sayısı yazılır.
- Sabit terimi bulmak için değişkenler yerine 0 sayısı yazılır.

İpucu

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x+y)^n$ ifadesinin x in azalan kuvvetlerine göre açılımındaki

- Baştan $r+1$ inci terim $\binom{n}{r}(x)^{n-r} \cdot (y)^r$ dir.
- Sondan $r+1$ inci terim $\binom{n}{r}(x)^{r} \cdot (y)^{n-r}$ dir.
- n çift sayı ise $(x+y)^n$ açılımında, ortadaki terim bulunurken $r = \frac{n}{2}$ alınır. n, tek sayı ise terim sayısı $n+1$ tane, yani çift sayıda olacağından "ortadaki terim" olmayacaktır.

10.1.2. Basit Olayların Olasılıkları

10.1.2.1. Örnek Uzay, Deney, Çıktı, Bir Olayın Tümleyeni, Kesin Olay, İmkânsız Olay, Ayrık Olay ve Ayrık Olmayan Olay

Bilgi

Tekrarlanabilen, farklı tekrarında farklı sonuçlar elde edilebilen süreçlere birer **deney** denir. Bir deneyde elde edilen sonuçların her birine o deneye ait **çıktı** denir. Örneğin havaya madenî para atma bir deneydir ve burada yere düşen madenî paranın üst yüzündeki "yazı" ya da "tura" sonuçları bu deneye ait çıktılardır. Bir deneyin bütün çıktılarının kümesine o deneyin **örnek uzayı** denir. Örnek uzay, genellikle E ile gösterilir. Örnek uzayın her bir alt kümesine **olay** denir.

A olayının çıktılarının dışında örnek uzayın bütün çıktılarını içeren olaya **A olayının tümleyeni** denir ve A' ile gösterilir.

Bir madenî paranın bir defa atılması deneyindeki basit olaylar $\{yazı\}$ ve $\{tura\}$ olur.

İpucu

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tüm rakamların yazılı olduğu bilyeler bir torbaya konuluyor. Torbadan "rastgele" bir bilye çekilip üzerinde yazılan sayıya bakılıyor. Bu işlem bir deneydir.

Torbadaki tüm bilyelerde yazan rakamlar, örnek uzayı oluşturur. Örnek uzay kümesi $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dur ve örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 10$ olur.

Torbadan çekilen bilyelerin üzerinde çift rakam yazma olayı, A ise $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ve $s(A) = 5$ olur. Torbadan çekilen bir bilyenin üzerinde 7 rakamının yazması, bir basit olaydır.

Torbadan çekilen bir bilyenin üzerinde asal sayı yazması olayı, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ise B olayının tümleyeni, "torbadan çekilen bir bilyenin üzerinde asal sayı yazmaması" olayıdır. Bu olay, $B' = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$ şeklinde yazılır. $s(B) + s(B') = s(E)$ olduğuna dikkat ediniz.

İpucu

n tane madenî paranın birlikte atılması deneyi ile bir madenî paranın n defa atılması deneyinin örnek uzayı aynıdır ve 2^n elemanlıdır.

İpucu

n tane zarın birlikte atılması deneyi ile bir zarın n defa atılması deneyinin örnek uzayı aynıdır ve 6^n elemanlıdır.

Bilgi

Aynı örnek uzaydaki bir olaya ait olası durumların sayısı başka bir olaya ait olası durumların sayısına eşit ise bu olaylara **eş olası olaylar**, eşit değil ise **eş olası olmayan olaylar** denir.

Bilgi

- Ortak elemanları olmayan kümeler ile temsil edilen olaylara **ayrık olaylar** denir. A ve B ayrık iki olay ise $A \cap B = \varnothing$ olur.
- İki olayın ortak elemanı varsa bu olaylara **ayrık olmayan olaylar** denir. A ve B ayrık olmayan iki olay ise $A \cap B \neq \varnothing$ olur.

10.1.2.2. Olasılık Kavramı ile İlgili Uygulamalar

Bilgi

Her bir çıktısının gelme şansı eşit olan örnek uzay E ve bu örnek uzayın bir olayı A olmak üzere A olayının gerçekleşme olasılığı P(A) ile gösterilir. Buradan

$P(A) = \dfrac{\text{A olayının eleman sayısı}}{\text{Örnek uzayın eleman sayısı}} = \dfrac{s(A)}{s(E)}$ ile bulunur.

Bu durum eş olası olmayan olaylar için geçerli değildir.

Bir A olayının olma olasılığı en az 0, en çok 1 olur. $0 \leq P(A) \leq 1$ olur.

Olasılığı 0 olan olaylara **imkânsız olay**, 1 olan olaylara **kesin olay** denir.

İpucu

Bir para atma deneyinde elde edilen basit olayların olasılıkları eşit ise bu para **hilesizdir** denir. Aynı durum zar atma deneyi için de geçerlidir.

Bilgi

- A ve B ayrık iki olay ise A veya B olayının olma olasılığı bu olayların olasılıkları toplamıdır. $P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olur.
- A ve B ayrık olmayan iki olay ise $P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ olur.

İpucu

Örnek uzayın herhangi bir A olayının tümleyeni A' olmak üzere $P(A) + P(A') = 1$ olur.