10.4.1. İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Tanım

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denklemine **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.
a, b, c denklemin katsayıları, x denklemin bilinmeyenidir.

Denklemi sağlayan x_1 ve x_2 sayılarına **denklemin kökleri**, köklerin oluşturduğu kümeye ise **denklemin çözüm kümesi** denir. Çözüm kümesi $Ç = \{x_1, x_2\}$ biçiminde gösterilir.

$x^2 - 3x + 1 = 0, x^2 + x = 0, 3x^2 - 4 = 0$ ve $-2x^2 = 0$ denklemleri ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerdir.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

İkinci derece denklemler çözülürken farklı yöntemler kullanılır. Bu yöntemler çarpanlara ayırma (tam kareye tamamlama, iki kare farkı, değişken değiştirme) ve diskriminant yöntemi olarak özetlenebilir.

$ax^2 + bx + c = 0$ Denkleminin Çarpanlarına Ayırma Yöntemi ile Çözümü

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin sol tarafı çarpanlarına ayrılabilen türden ise her bir çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek denklemin kökleri bulunur.

$ax^2 + bx + c = 0$ Denkleminin Diskriminant Yöntemi ile Çözümü

1. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin iki farklı gerçek kökü vardır. Bu kökler

   $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ veya $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ olur.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin birbirine eşit (çakışık) iki gerçek kökü vardır.
   Bu kökler
   $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ ve denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$ olur.

3. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ olduğundan $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek kökü yoktur.
   Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \emptyset$ olur.

2. Karmaşık Sayılar

Tanım

$x + 5 = 2$ ise $x = 2 - 5 = -3$ olduğundan denklemin doğal sayılar kümesindeki çözüm kümesi boş kümedir. Bu durumda doğal sayılar kümesi yetersiz kaldığından yeni bir sayı kümesine ihtiyaç duyulmuştur. Bu sayı kümesine **tam sayılar kümesi** adı verilir ve $\mathbb{Z}$ ile gösterilir.
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2 ...\}$ ve $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ olur.

$2x = 5$ ise $x = \dfrac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan denklemin tam sayılar kümesinde çözümü yoktur.

Bu durumda tam sayılar kümesine kesirli sayıların ilave edilmesiyle yeni bir sayı kümesi elde edilmiştir. Bu sayı kümesine **rasyonel sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.
$\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \text{EBOB}(a, b) = 1 \text{ ve } b \neq 0\right\}$ ve $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ olur.

$x^2 = 2$ denkleminin rasyonel sayılar kümesinde çözümü yoktur. $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$ ve benzer sayıları içeren yeni bir sayı kümesi tanımlanmıştır.

Bu sayı kümesine **irrasyonel sayılar kümesi** adı verilir ve $\mathbb{Q}'$ ile gösterilir.
$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ kümesine **gerçek sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ olur.

$x^2 + 4 = 0$ denkleminde $x^2 = -4$ olduğundan karesi negatif olan gerçek sayı olmadığından bu denklemin gerçek sayılar kümesinde çözümü yoktur. Bu nedenle yeni bir sayı kümesine ihtiyaç duyulmuştur.

Bu durumda "gerçek sayı olmayan ve karesi -1 e eşit olan" sayı tanımlanmıştır.

$\sqrt{-1}$ sayısına **sanal sayı** (imajiner sayı) **birimi** denir.
$i = \sqrt{-1}$ veya $i^2 = -1$ biçiminde gösterilir.

Not

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

i) $a, b \geq 0$ için $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

ii) $a, b < 0$ için $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \neq \sqrt{a \cdot b}$

Sanal Sayı Biriminin Kuvvetleri

$n, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3 \end{cases}$$ şeklinde tanımlanır.

Tanım

$a, b \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere
$z = a + ib$ biçimindeki sayılara **karmaşık** (kompleks) **sayı** denir. Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir.
$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + ib \text{ ve } a, b \in \mathbb{R}\}$ olarak gösterilir.

$z = a + ib$ karmaşık sayısında a sayısına karmaşık sayının **gerçek kısmı** denir ve $\mathrm{Re}(z) = a$ biçiminde gösterilir.

$z = a + ib$ karmaşık sayısında b sayısına karmaşık sayının **sanal** (imajiner) **kısmı** denir ve $\mathrm{Im}(z) = b$ biçiminde gösterilir.

Tanım

$z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ karmaşık sayıları eşit ise sayıların gerçek ve sanal kısımları birbirine eşittir.
Yani $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c$ ve $b = d$ olur.

Tanım

$a, b \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere $z = a + ib$ karmaşık sayısı verildiğinde $a + i(-b)$ sayısına z sayısının **eşleniği** denir ve $\overline{z}$ ile gösterilir. Yani
$z = a + ib \Rightarrow \overline{z} = a - ib$ olur.

Karmaşık Sayılarda İşlemler

a) Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Karmaşık sayılarda toplama veya çıkarma işlemleri yapılırken gerçek kısımlar gerçek kısımlarla, sanal kısımlar da sanal kısımlarla toplanır veya çıkarılır.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ ise

a) $z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ ve

b) $z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$ bulunur.

b) Çarpma İşlemi

Karmaşık sayılarda çarpma işlemi yapılırken çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği kullanılır.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ ise

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + ib) \cdot (c + id) \\ &= a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + ib \cdot id \\ &= a \cdot c + (a \cdot d + b \cdot c)i + i^2(b \cdot d) \\ &= (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i \end{aligned}$$ bulunur.

c) Bölme İşlemi

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ ise

$\frac{z_1}{z_2}, z_2 \neq 0$ işlemi, kesrin $\overline{z_2}$ karmaşık sayısı kullanılarak genişletilmesiyle yapılır. Yani

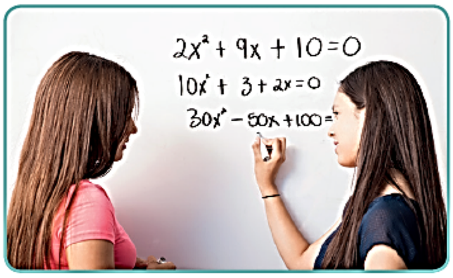
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + ib)}{(c + id)} &= \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} \\ &= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$ olur.

Karmaşık Sayılarda İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözümünde $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise denklemin gerçek kökünün olmadığı ifade edilmişti.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise denklemin karmaşık sayılar kümesinde çözümü vardır. Denklemin kökleri

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ veya $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ olur.



Sonuç

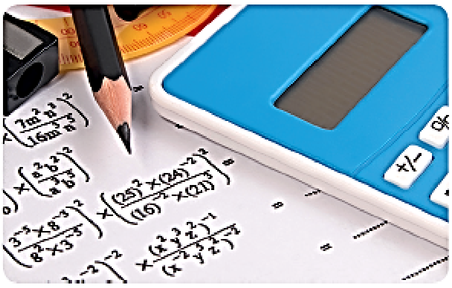
i sanal sayı birimi olmak üzere gerçek katsayılı $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin bir kökü $m + ni$ ise diğer kökü bu kökün eşleniği olan $m - ni$ dir.

3. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki İlişkiler

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ olmak üzere

<table>
<tr><td>1. Kökler Toplamı</td><td colspan="2">$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\cancel{+\sqrt{\Delta}}-b\cancel{-\sqrt{\Delta}}}{2a}=\frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a}=-\frac{b}{a}$
$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ olur.</td></tr>
<tr><td>2. Kökler Çarpımı</td><td colspan="2">$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b+\sqrt{\Delta})\cdot(-b-\sqrt{\Delta})}{2a\cdot 2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$
$=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2}=\frac{\cancel{4}\cancel{a}c}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}}=\frac{c}{a}$
$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ olur.</td></tr>
<tr><td>3. Kökler Farkının Mutlak Değeri</td><td colspan="2">$|x_1-x_2|=\left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right|$
$=\left|\frac{\cancel{-b}+\sqrt{\Delta}\cancel{+b}+\sqrt{\Delta}}{2a}\right|$
$=\left|\frac{\cancel{2}\sqrt{\Delta}}{\cancel{2}a}\right|$
$=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ olur.</td></tr>
<tr><td>4. Köklerin Çarpmaya Göre Terslerinin Toplamı</td><td colspan="2">$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{-\frac{b}{\cancel{a}}}{\frac{c}{\cancel{a}}}=-\frac{b}{c}$
$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{b}{c}$ olur.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5. Köklerin Kareleri ve Küpleri Toplamı</td><td>a) Köklerin Kareleri Toplamı</td><td>b) Köklerin Küpleri Toplamı</td></tr>
<tr><td>$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2\cdot(x_1\cdot x_2)$
$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}$
$=\frac{b^2}{a^2}-2\cdot\frac{c}{a}$
$=\frac{b^2-2ac}{a^2}$ olur.</td><td>$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1\cdot x_2\cdot(x_1+x_2)$
$=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\cdot\frac{c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)$
$=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}$
$=\frac{3abc-b^3}{a^3}$ olur.</td></tr>
</table>

Kökleri Verilen İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemin Yazılması



$a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}$ bulunur.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ve $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ değerleri yerlerine yazılırsa

$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + (x_1 \cdot x_2) = 0$ elde edilir.