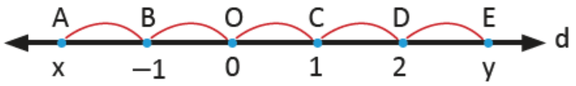
2.1. Doğrunun Analitik İncelenmesi

Koordinat (Sayı) Doğrusu

Her noktası bir reel sayıya karşılık gelen doğruya **koordinat (sayı) doğrusu** denir. Herhangi iki reel sayı arasında sonsuz tane reel sayı vardır.



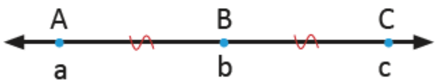
Bir A noktası x reel sayısı ile eşleştirildiğinde A noktasının koordinatı x olur ve koordinatı x olan A noktası A(x) şeklinde yazılır.

Koordinat doğrusunda iki nokta arasındaki uzaklık bu iki noktanın koordinatları farkının mutlak değerine eşittir.

A(x) ve E(y) noktaları arasındaki uzaklık $|AE| = |y - x| = |x - y|$ olur. Örneğin koordinat doğrusunda A(–2) ve E(3) noktaları arasındaki uzaklık $|AE| = |3 - (-2)| = 5$ birimdir.

Koordinat Doğrusunda Orta Noktanın Koordinatı

Koordinat doğrusunda A ile C noktalarının ortasındaki nokta B olsun.



$$c - b = b - a$$

$$2b = a + c$$

B noktasının koordinatı $b = \dfrac{a+c}{2}$ olur.

Analitik Düzlem

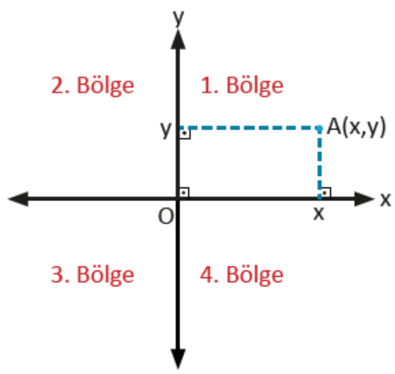
Bir düzlemde başlangıç noktaları aynı olan ve dik kesişen iki koordinat doğrusunun oluşturduğu sisteme **koordinat sistemi** denir.

Yatay eksen x ile, düşey eksen y ile gösterilir.

O noktası koordinat eksenlerinin kesim noktasıdır ve bu noktaya **başlangıç noktası** veya **orijin** denir.

Üzerinde dik koordinat sistemi tanımlanmış düzleme **analitik düzlem** denir. Koordinat sistemi analitik düzlemi 4 bölgeye ayırır.

Yandaki şekilde koordinatları (x, y) olan A noktası gösterilmiştir. A(x, y) ifadesindeki x, A noktasının **apsisi**; y, A noktasının **ordinat**ıdır.



Hatırlatma

A(x, y) noktası

1. bölgede ise $x > 0, y > 0$ (+, +) olur.

2. bölgede ise $x < 0, y > 0$ (–, +) olur.

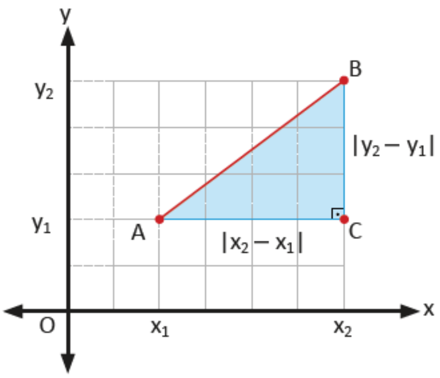
3. bölgede ise $x < 0, y < 0$ (–, –) olur.

4. bölgede ise $x > 0, y < 0$ (+, –) olur.

Hatırlatma

- Bir kenar uzunluğu a birim olan ABC eşkenar üçgeninin alanı $A(\widehat{ABC}) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ birimkare olur.
- Taban uzunlukları a birim ve c birim, yüksekliği h birim olan ABCD yamuğunun alanı $A(ABCD) = \dfrac{(a+c)\cdot h}{2}$ birimkare olur.

2.1.1. Analitik Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık



Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilsin.

[AB] hipotenüs ve dik kenarları x ile y eksenine paralel olacak şekilde ABC üçgeni çizildiğinde

$|BC| = |y_2 - y_1|$ ve

$|AC| = |x_2 - x_1|$ olur.

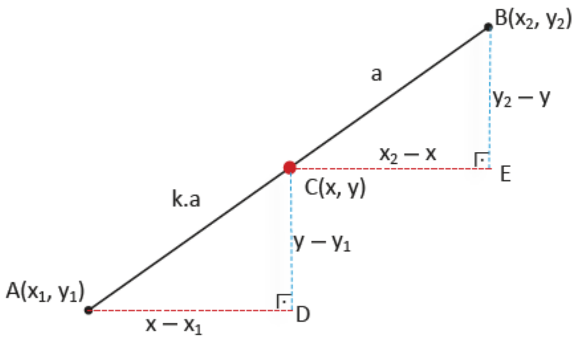
ABC üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında A ile B noktaları arasındaki uzaklık

$|AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$ $\qquad$ $|a - b|^2 = (a - b)^2 = (b - a)^2$ olduğundan

$\boxed{|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$ şeklinde elde edilir.

2.1.2. Doğru Parçasını Belli Bir Oranda Bölen Noktanın Koordinatları

1. $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilsin. $C \in [AB]$ ve $\dfrac{|AC|}{|CB|} = k$ ise "C noktası [AB] nı k oranında içten böler." denir.

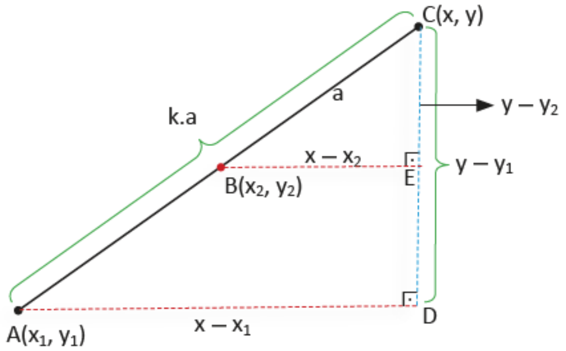


Yukarıdaki şekilde CAD ile BCE dik üçgenleri benzerdir (A.A. benzerliği).

$\dfrac{|AC|}{|BC|} = k$ olduğundan $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = k$ ve $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y} = k$ olur.

C(x, y) noktalarının koordinatları yukarıdaki eşitlikler kullanılarak bulunur.

2. $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilsin. $C \notin [AB]$ ve $\dfrac{|AC|}{|CB|} = k$ ise "C noktası [AB] nı k oranında dıştan böler." denir.



Yandaki şekilde CAD ile CBE dik üçgenleri benzerdir (A.A. benzerliği).

$\dfrac{|AC|}{|BC|} = k$ olduğundan

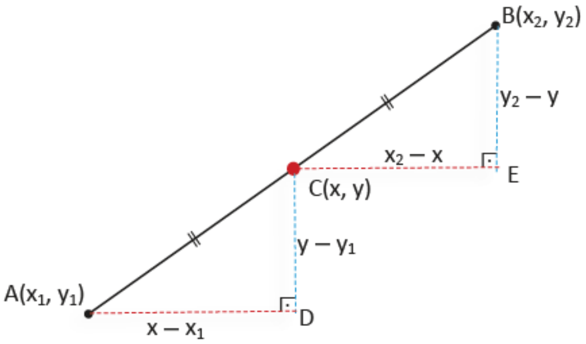
$\dfrac{y-y_1}{y-y_2} = k$ ve $\dfrac{x-x_1}{x-x_2} = k$ olur.

C(x, y) noktalarının koordinatları yukarıdaki eşitlikler kullanılarak bulunur.

Bir Doğru Parçasının Orta Noktası

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verildiğinde oluşacak AB doğru parçasının orta noktası C(x, y) olsun.

Bu durumda $\dfrac{|CB|}{|AC|} = 1$ olur. C(x, y) noktasının koordinatları aşağıdaki gibi bulunur.



CAD ile BCE dik üçgenleri A.K.A. eşlik bağıntısına göre eştir. Buna göre

$$x - x_1 = x_2 - x \Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y - y_1 = y_2 - y \Rightarrow y = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ olur.}$$

Buradan orta noktanın koordinatları $\boxed{C(x, y) = C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$ olarak bulunur.

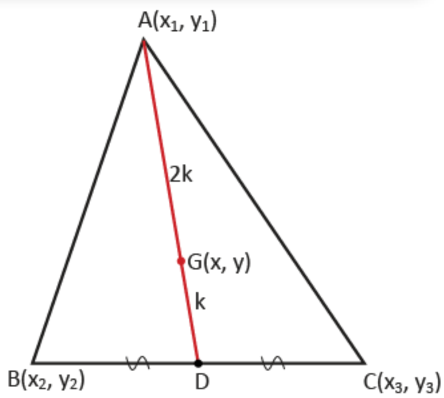
Üçgenin Ağırlık Merkezinin Koordinatları

Köşe koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatları G(x, y) olsun.

BC doğru parçasının orta noktasının koordinatları

$D\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}, \dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)$ olur.

G noktası [AD] nı $\dfrac{|AG|}{|GD|} = 2$ olacak şekilde böler.



A ile G ve G ile D koordinatları arasındaki farkın oranı 2 ye eşitlenerek G noktasının koordinatları

$$\frac{x_1 - x}{x - \frac{x_2 + x_3}{2}} = 2 \Rightarrow x_1 - x = 2x - (x_2 + x_3)$$

$$\Rightarrow 3x = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ ve}$$

$$\frac{y_1 - y}{y - \frac{y_2 + y_3}{2}} = 2 \Rightarrow y_1 - y = 2y - (y_2 + y_3)$$

$$\Rightarrow 3y = y_1 + y_2 + y_3$$

$$\Rightarrow y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

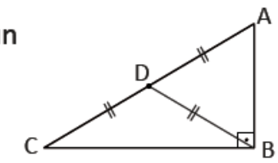
Köşeleri $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeninin ağırlık merkezi

$$G(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) \text{ olur.}$$

Hatırlatma

Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğu hipotenüsün yarısına eşittir.

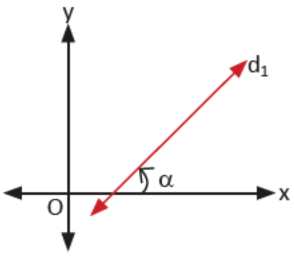
Yandaki şekilde $|BD| = \frac{|AC|}{2}$ olur.

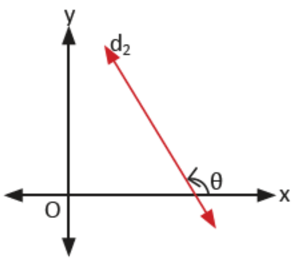


2.1.3. Analitik Düzlemde Doğrular

Doğrunun Eğimi

Bir doğrunun x ekseniyle pozitif yönde yapmış olduğu açıya **doğrunun eğim açısı** denir.





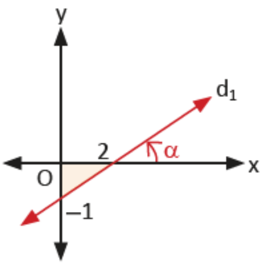
Eğim açısı [0°, 180°) nda bulunur.

Bir doğrunun eğim açısının tanjant değerine **doğrunun eğimi** denir ve eğim **m** ile gösterilir.

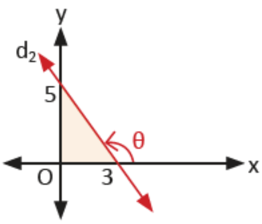
Yukarıdaki şekillerde d_1 doğrusunun eğim açısı α, d_2 doğrusunun eğim açısı θ olduğunda

d_1 doğrusunun eğimi $m_1 = \tan\alpha$,

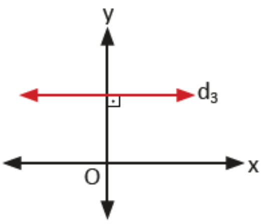
d_2 doğrusunun eğimi $m_2 = \tan\theta$ olur.



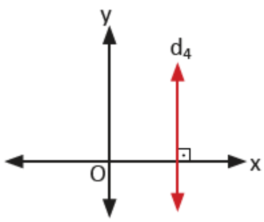
$\alpha < 90°$ olduğundan $m_1 = \tan\alpha = \frac{1}{2}$ olur.



$\theta > 90°$ olduğundan $m_2 = \tan\theta = -\frac{5}{3}$ olur.



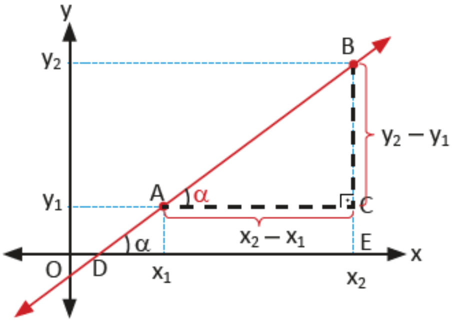
Eğim açısı 0° olduğundan $m_3 = \tan 0° = 0$ olur.



Eğim açısı 90° olduğundan $m_4 = \tan 90° =$ tanımsız olur.

İki Noktadan Geçen Doğrunun Eğimi

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilsin.

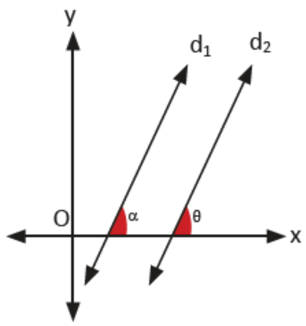


AB doğrusunun eğim açısı α olsun. BAC ile BDE açıları yöndeş açılar olduğundan BAC açısının ölçüsü α olur.
ABC dik üçgeninde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi

$\boxed{m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ olarak bulunur.

Paralel Doğrular

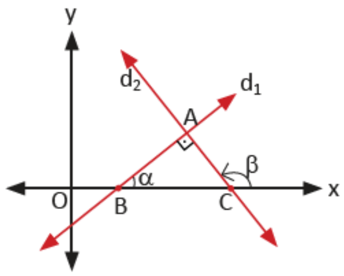
Ortak noktaları olmayan doğrulara **paralel doğrular** denir. Paralel doğrulardan biri y eksenine paralel değilse doğruların eğimleri birbirine eşittir.



d_1 doğrusunun eğim açısı α, eğimi m_1; d_2 doğrusunun eğim açısı θ, eğimi m_2 olsun.
$d_1 // d_2$ olduğundan $\alpha = \theta$ ve $\tan\alpha = \tan\theta$ olur. Buradan $m_1 = m_2$ olur.

Dik Kesişen Doğrular

Birbirine dik olan iki doğrudan herhangi biri eksenlere paralel değilse bu iki doğrunun eğimleri çarpımı -1 olur.



d_1 doğrusunun eğim açısı α, eğimi m_1; d_2 doğrusunun eğim açısı β, eğimi m_2 olsun. Bu durumda

$m_1 = \tan\alpha$ olur.

$\beta = 90° + \alpha$ olduğundan

$m_2 = \tan\beta = \tan(90° + \alpha) = -\cot\alpha$ olur. Buradan

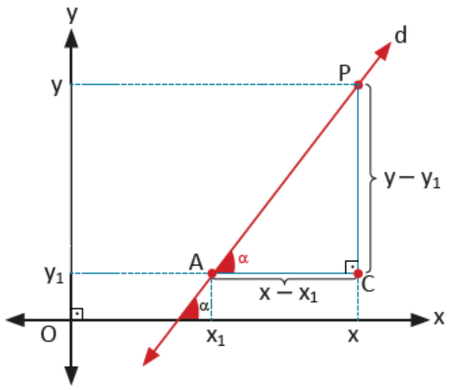
d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri çarpımı

$m_1 \cdot m_2 = \tan\alpha \cdot (-\cot\alpha) = -1$

$\mathbf{m_1 \cdot m_2 = -1}$ **olur.**

Eğimi ve Bir Noktası Bilinen Doğru Denklemi

Eğimi m olan ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen doğrunun denklemi, doğru üzerinde değişken bir $P(x, y)$ noktası alınarak bulunur.



Şekildeki d doğrusunun eğim açısı α olsun. Bu durumda CAP açısının ölçüsü α (yöndeş açı) olur.
CAP dik üçgeninde doğrunun eğimi
$m = \tan\alpha$ yazıldığında $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ olur. Buradan
eğimi m olan ve $A(x_1, x_2)$ noktasından geçen doğrunun
denklemi $\boxed{\mathbf{y - y_1 = m \cdot (x - x_1)}}$ şeklinde elde edilir.
Bu doğru denklemi düzenlendiğinde

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = m \cdot x - m \cdot x_1$$
$$\Rightarrow y = m \cdot x \underbrace{- m \cdot x_1 + y_1}_{n} = m \cdot x + n \text{ olur.}$$

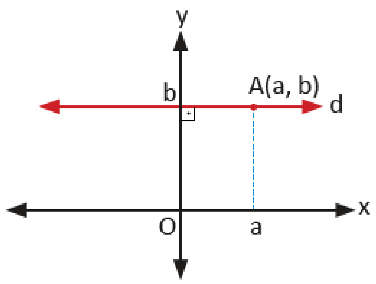
Eğimi m olan ve y eksenini n noktasında kesen doğrunun denklemi $\boxed{\mathbf{y = m \cdot x + n}}$ biçiminde elde edilir.

Sonuç

$x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ veya $b \neq 0$ olmak üzere $ax + by + c = 0$ eşitliğinde y yalnız bırakıldığında $y = \dfrac{-ax - c}{b} \Rightarrow y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ elde edilir. Buradan $ax + by + c = 0$ doğrusunun eğimi $m = -\dfrac{a}{b}$ olur.

Eksenlere Paralel Doğru Denklemleri

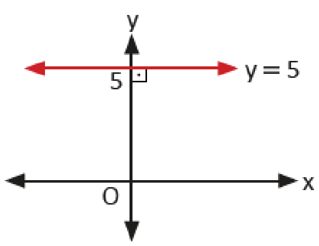
1. x Eksenine Paralel Doğru Denklemleri

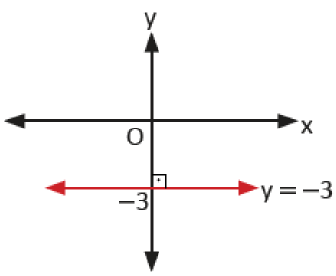


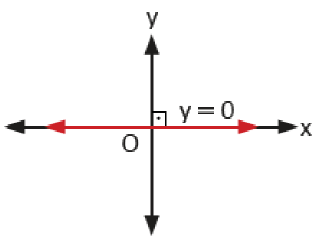
A(a, b) noktasından geçen ve x eksenine paralel olan doğrunun denklemi $y - b = m \cdot (x - a)$ olur.
x eksenine paralel doğruların eğimi $m = 0$ olduğundan

$$y - b = 0 \cdot (x - a) \Rightarrow y - b = 0$$
$$\Rightarrow y = b \text{ olur.}$$

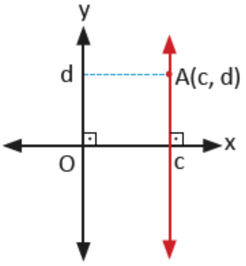
A(a, b) noktasından geçen ve x eksenine paralel doğru denklemleri $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = b$ biçimindedir. Bu doğruların bazıları aşağıdaki gibidir.







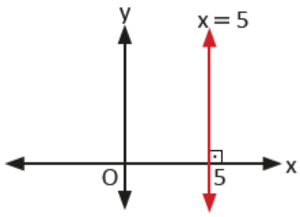
2. y Eksenine Paralel Doğruların Denklemleri

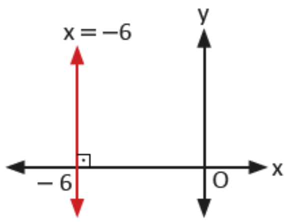


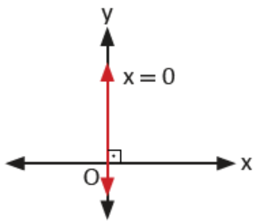
A(c, d) noktasından geçen ve y eksenine paralel olan bir doğrunun denklemi $y - d = m \cdot (x - c)$ olur. Buradan eğim $m = \dfrac{y-d}{x-c}$ olur.

$m = \tan 90°$ olduğundan doğrunun eğimi tanımsızdır. m tanımsız olduğu için $x - c = 0$ olur. Buradan $x = c$ olarak bulunur.

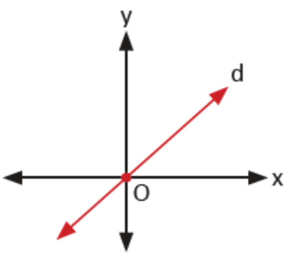
A(c, d) noktasından geçen ve y eksenine paralel doğruların denklemleri $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x = c$ olur. Bu doğruların bazıları aşağıdaki gibidir.







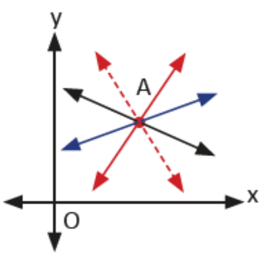
3. Başlangıç Noktasından (Orijin) Geçen Doğruların Denklemleri

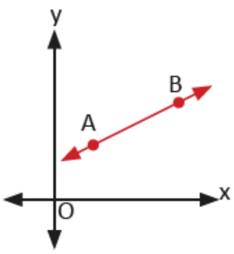


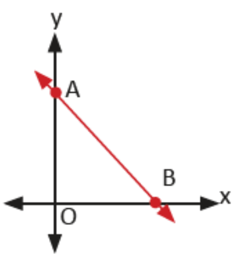
O(0, 0) noktasından geçen ve eğimi m olan doğru denklemi $y - 0 = m \cdot (x - 0) \Rightarrow y = m \cdot x$ olur.

Bir Doğrunun Grafiği

Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi analitik düzlemde alınan herhangi bir A noktasından sonsuz sayıda doğru geçer. Analitik düzlemde alınan herhangi iki noktadan sadece bir doğru geçer.
Bir doğrunun grafiğini çizebilmek için doğrunun üzerindeki iki noktayı bilmek yeterlidir.
İşlemlerin daha kolay olabilmesi için bu noktalar doğrunun x ve y eksenlerini kestiği yerlerden seçilebilir.



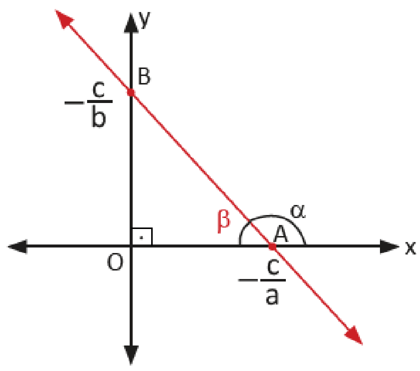




$x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax + by + c = 0$ doğrusu eksenleri

$x = 0$ için $y = -\dfrac{c}{b}$ ve

$y = 0$ için $x = -\dfrac{c}{a}$ noktalarında keser. Doğru grafiği ve doğrunun eğimi aşağıdaki gibidir.



AB doğrusunun eğim açısı α ve $m(\widehat{BAO}) = \beta$ olsun.

$\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - \beta$ olur. Buradan

$\tan\alpha = \tan(180° - \beta) = -\tan\beta$

$m = \tan\alpha = -\tan\beta$

$$\Rightarrow m = -\frac{-\frac{c}{b}}{-\frac{c}{a}} = -\frac{a}{b}$$

$ax + by + c = 0$ doğrularının eğimi $\boxed{m = -\frac{a}{b}}$ olur.

Sonuç

Eğimleri eşit olan doğrular birbirine paraleldir.
Birbirine paralel doğruların eğimleri eşittir.

İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

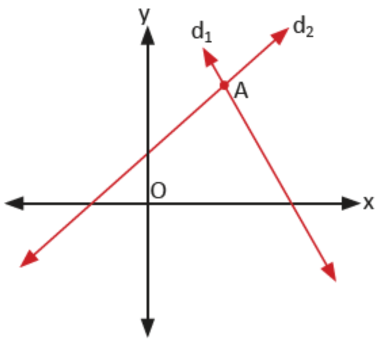
$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğruları verilsin.
Bu iki doğru birbirine göre üç durumda incelenecektir.

1. d_1 ve d_2 doğruları sadece bir A noktasında kesişebilir.
d_1 doğrusunun eğimi m_1 ve d_2 doğrusunun eğimi m_2 olsun.
Bu durumda $m_1 \neq m_2$ olmalıdır.

$m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ ve $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ için

$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ olur.



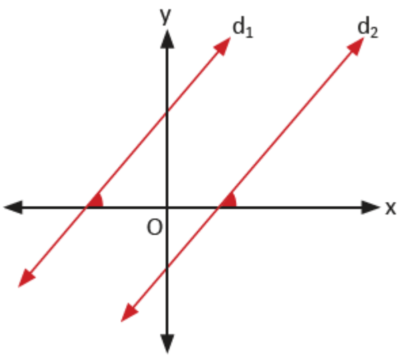
d_1 ve d_2 doğruları sadece bir A noktasında kesiştiğinde

$d_1 \cap d_2 = \{A\}$ olur.

2. d_1 ve d_2 doğruları birbirine paralel olabilir.
Bu durumda $m_1 = m_2$ olur.

$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ olur.



d_1 ve d_2 doğruları eksenleri farklı noktalarda kestiği için

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ olmalıdır.

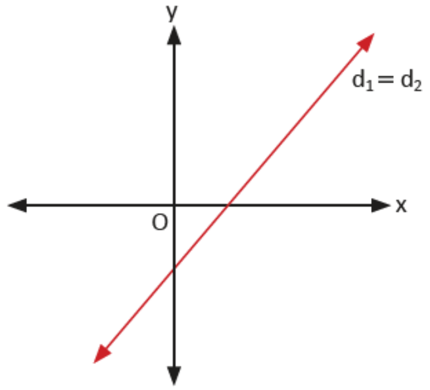
Verilen iki doğru $d_1 // d_2$ olduğunda $d_1 \cap d_2 = \{\ \}$ olur.

3. d_1 ve d_2 doğruları çakışık olabilir.
Çakışık doğrular bir doğrunun farklı şekillerde adlandırılmasıyla oluşan doğrulardır. Bu doğruların eğimleri ve eksenleri kestiği noktalar aynı olur.

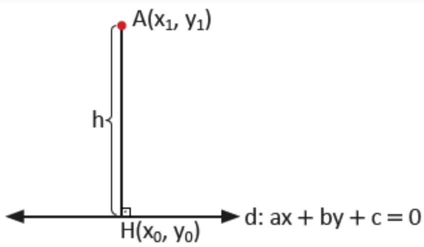
O hâlde $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ olur.

d_1 ve d_2 doğruları çakışık olduğunda

$d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$ olur.



2.1.4. Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

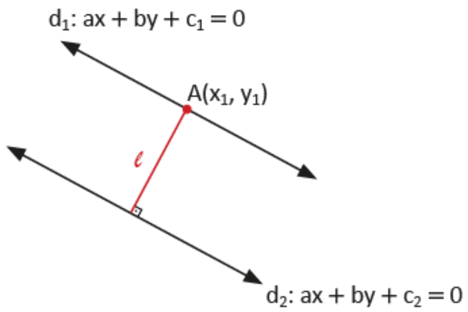


$A(x_1, y_1)$ noktasının $d: ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı

$h = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ formülü ile bulunur.

Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

Birbirine paralel olan $ax + by + c_1 = 0$ ve $ax + by + c_2 = 0$ doğrularının arasındaki uzaklık aşağıdaki gibi gösterilir.



d_1 doğrusu üzerinde bir $A(x_1, y_1)$ noktası alınır.
A noktasının d_2 doğrusuna olan uzaklığı

$\ell = \frac{|ax_1 + by_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ olur.

A noktası d_1 doğrusu üzerinde olduğundan bu nokta doğru denklemini sağlar. Buradan

$ax_1 + by_1 + c_1 = 0$ ve $ax_1 + by_1 = -c_1$ olur.

Bu denklem $\ell = \frac{|ax_1 + by_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ eşitliğinde yerine yazıldığında

paralel iki doğru arasındaki uzaklık $\boxed{\ell = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$ olarak bulunur.