

3. TRİGONOMETRİ

Toplam ve Fark Formülleri

$$\checkmark \sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \quad \checkmark \cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\checkmark \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b \quad \checkmark \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\checkmark \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\checkmark \cot(a + b) = \frac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot a + \cot b}$$

$$\checkmark \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$\checkmark \cot(a - b) = \frac{\cot a \cdot \cot b + 1}{\cot b - \cot a}$$

İki Kat Açılı Formülleri

$$\checkmark \sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\checkmark \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2 \cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 a \end{aligned}$$

$$\checkmark \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}$$

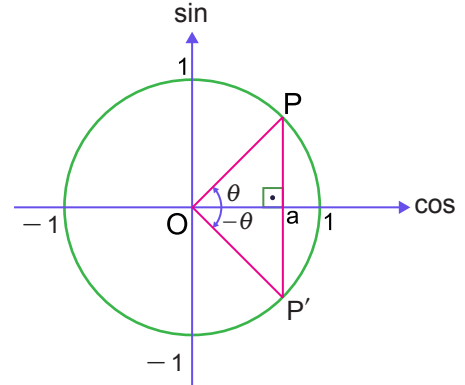
$\cos x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi

$-1 \leq a \leq 1$ olmak üzere $\cos x = a$

denkleminin $[0, 2\pi)$ nda bir kökü

θ ise denklemin çözüm kümesi

$$\mathcal{C} = \{x \mid x = \theta + k \cdot 2\pi \vee x = -\theta + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$



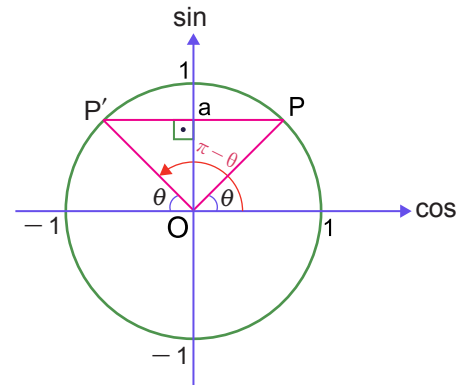
$\sin x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi

$-1 \leq a \leq 1$ olmak üzere $\sin x = a$

denkleminin $[0, 2\pi)$ nda bir kökü

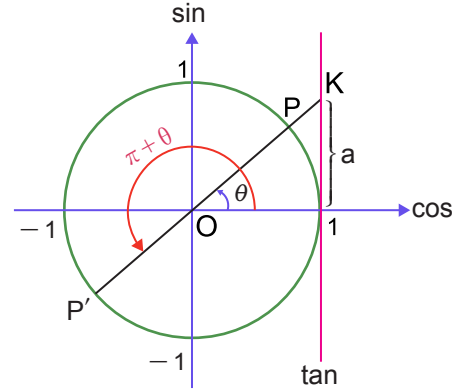
θ ise denklemin çözüm kümesi

$$\mathcal{C} = \{x \mid x = \theta + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \theta + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$



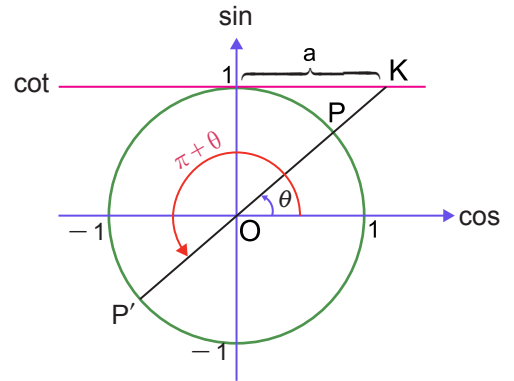
$\tan x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\tan x = a$ denkleminin $[0, \pi)$ nda bir kökü θ ($\theta \neq \frac{\pi}{2}$) ise denklemin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{x \mid x = \theta + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$ olur.



$\cot x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\cot x = a$ denkleminin $(0, \pi)$ nda bir kökü θ ise denklemin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{x \mid x = \theta + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$ olur.



$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\sin f(x) = \sin g(x) \text{ ise } f(x) = g(x) + k \cdot 2\pi \vee f(x) = \pi - g(x) + k \cdot 2\pi$$

$$\cos f(x) = \cos g(x) \text{ ise } f(x) = g(x) + k \cdot 2\pi \vee f(x) = -g(x) + k \cdot 2\pi$$

$$\tan f(x) = \tan g(x) \text{ ise } f(x) = g(x) + k \cdot \pi$$

$$\cot f(x) = \cot g(x) \text{ ise } f(x) = g(x) + k \cdot \pi$$

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\sin f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = k \cdot \pi$$

$$\cos f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

$$\sin f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\cos f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = k \cdot 2\pi$$

$$\sin f(x) = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\cos f(x) = -1 \Rightarrow f(x) = \pi + k \cdot 2\pi$$

a, b ve $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $a \sin x + b \cos x = c$ biçimindeki denklemlere, **$\sin x$ ve $\cos x$ e göre lineer (doğrusal) denklem** denir.

$$a \sin x + b \cos x = c \quad (\text{eşitliğin her iki tarafı } a \text{ ile bölünürse})$$

$$\sin x + \frac{b}{a} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \quad \left(\frac{b}{a} = \tan \alpha \text{ ve } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\frac{\cos \alpha \cdot \sin x + \sin \alpha \cdot \cos x}{\cos \alpha} = \frac{c}{a}$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cdot \cos \alpha$$

denkleminin çözülebilmesi için $-1 \leq \frac{c}{a} \cdot \cos \alpha \leq 1$ olmalıdır.

$$-1 \leq \frac{c}{a} \cdot \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{c^2}{a^2} \cdot \cos^2 \alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow c^2 \leq \frac{a^2}{\cos^2 \alpha} \quad \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \right)$$

$$\Rightarrow c^2 \leq a^2 \cdot (1 + \tan^2 \alpha)$$

$$\Rightarrow c^2 \leq a^2 \cdot \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)$$

$$\Rightarrow c^2 \leq a^2 + b^2 \text{ elde edilir.}$$

Bu eşitsizliğin sağlanması durumunda denklemin çözüm kümesi bulunabilir. Aksi durumda denklemin çözüm kümesi $\emptyset$ olur.

$a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere **$a \sin x + b \cos x = 0$** biçimindeki denklemlere **birinci dereceden homojen trigonometrik denklem** denir.

$a \sin x + b \cos x = 0$ denkleminde eşitliğin her iki yanı $\cos x \neq 0$ olmak üzere $\cos x$ e bölünüp

$$a \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + b \cdot \frac{\cos x}{\cos x} = 0$$

$$a \cdot \tan x + b = 0$$

$$\tan x = -\frac{b}{a} \text{ denklemine dönüştürülerek çözüm yapılır.}$$