



1. a) Bir belediye, su tasarrufunu teşvik etmek amacıyla "Akıllı Sayaç Geçiş Sistemi" uygulamaktadır. Bu sisteme göre kullanıcının mevcut su borcu x TL ise akıllı sayaca geçiş yapıldığında mevcut borcun yarısı silinmekte ve üzerine 500 TL sabit kurulum ücreti eklenmektedir. Bu işlem sonucunda oluşan yeni tutar, abonenin "Başlangıç Bakiyesi" olarak belirlenmektedir.

Buna göre bu sisteme geçen ve borç tutarı 600 TL ile 1400 TL (sınırlar dâhil) arasında olan aboneler için;

- Başlangıç bakiyesini borç miktarına bağlı olarak ifade eden fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız ve görüntü kümesini bulunuz.
- Bu fonksiyonun tersinin cebirsel temsilini bularak ters fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini belirleyiniz. (8 Puan)

- b) Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların terslerinin cebirsel temsillerini yazınız. Fonksiyonların tersinin var olmasını sağlayan en geniş tanım ve değer kümelerini dikkate alarak a ve b değerlerini bulunuz ve tablodaki boşlukları uygun şekilde doldurunuz. (15 Puan)

Tanım ve Değer Kümesi	Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	a ve b Değeri
$f : \mathbb{R} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R} - \{b\}$	$f(x) = 5 - \frac{2}{x+4}$		a = b =
$g : [a, \infty) \rightarrow [b, \infty)$	$g(x) = (x+4)^2 - 3$		a = b =
$h : [a, \infty) \rightarrow [b, \infty)$	$h(x) = \sqrt{x-2} + 7$		a = b =

2. Bir teknoloji firması, sürdürülebilir tarım projesi kapsamında iki farklı tip güneş paneli (Model-K ve Model-M) geliştirmiş ve günlük enerji üretiminin her zaman pozitif değerde kalmasına dikkat etmiştir. Bu panellerin günlük çalışma süresi (saat) ve günlük enerji üretimi (kWh) arasındaki ilişki

- x : panellerin günlük çalışma süresi
- $k(x)$: Model-K panelinin günlük enerji üretimi
- $m(x)$: Model-M panelinin günlük enerji üretimi

olmak üzere $k(x) = 8x + 2$ ve $m(x) = -2x^2 + 28x - 16$ fonksiyonları ile modellenmiştir.

Bu iki güneş paneli aynı anda ve aynı koşullarda çalışmaya başladıklarına göre

- a) Model-M panelinden elde edilen günlük enerji üretiminin maksimum olması için bu panelin günde kaç saat çalıştırılması gerektiğini bulunuz. (5 puan)

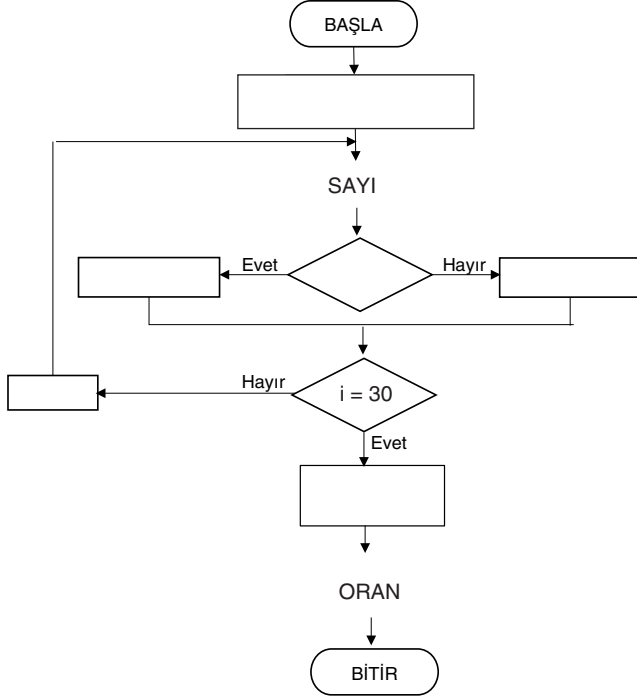
- b) Her iki panelin de aynı miktarda enerji ürettiği çalışma sürelerini hesaplayınız. (6 puan)

- c) Her iki panelin enerji üretimi eşitlendikten sonra Model-K panelinin, Model-M panelinden daha fazla enerji üretmeye başladığı saatin en küçük tam sayı değerini bulunuz. (8 puan)

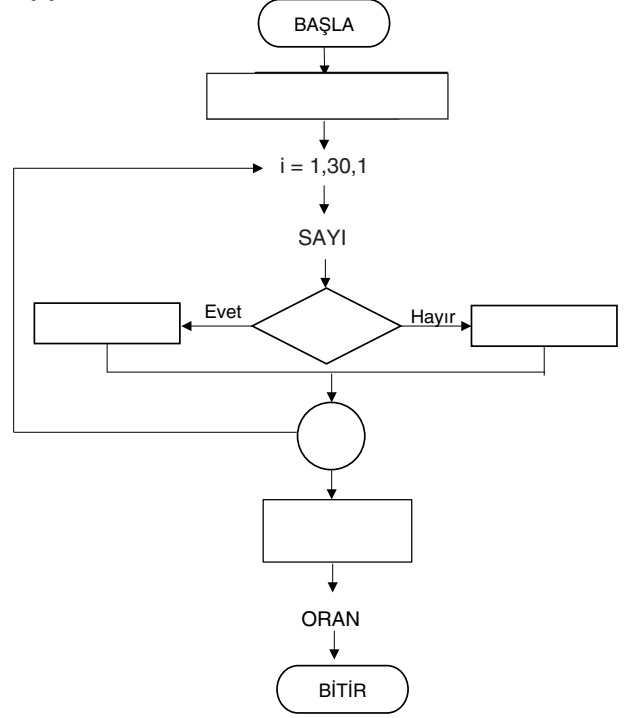
3. Aşağıda kullanıcı tarafından girilen ve en az birinin çift olduğu bilinen 30 sayıdan tek olan sayıların toplamının çift olanların toplamına oranını hesaplayan algoritmanın akış şeması verilmiştir. Akış Şeması 1 döngü kullanılmadan, Akış Şeması 2 döngü kullanılarak oluşturulmuştur.

Buna göre her iki akış şemasında eksik kalan yerleri algoritmanın işleyişine uygun sembol, metin ve matematiksel ifadelerle tamamlayınız. (22 Puan)

Akış Şeması 1



Akış Şeması 2

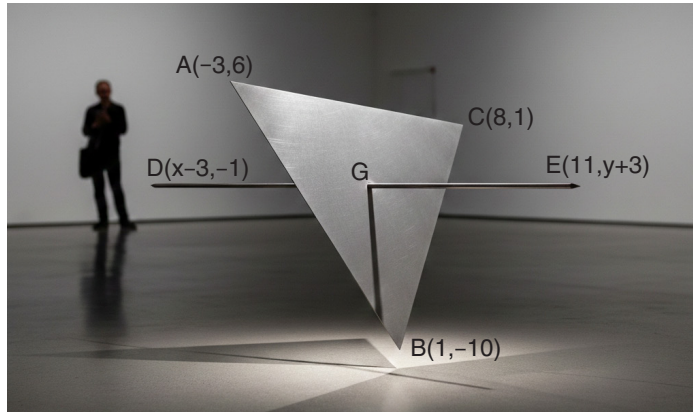


4. Konumların dik koordinat sistemindeki noktalarla gösterildiği aşağıdaki görselde, bir kurye şirketinin ana deposu $C(x, -2)$ noktası üzerindedir. Ana depodan aynı anda ve eşit hızda yola çıkan iki kurye, harita üzerinde $A(2, 5)$ ve $B(10, -1)$ noktalarında bulunan iki müşterisine aynı anda paket teslim edebiliyor.



Buna göre C noktasının apsisini bulunuz. (6 Puan)

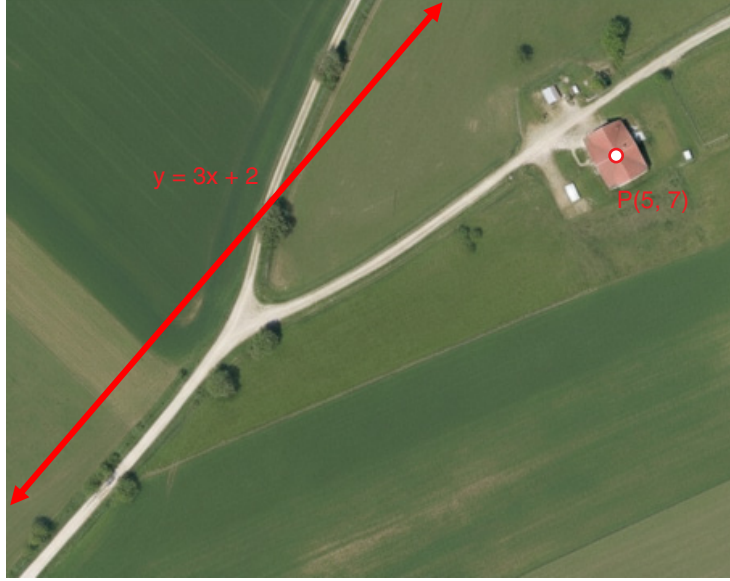
5. Bir sanat dergisi, bir heykeltıraşın tasarladığı üçgen bir metal levha ve bu levhayı kesen doğrusal bir çelik çubuktan oluşan eserin cepheden çekilmiş fotoğrafını incelemek için dik koordinat sisteminde modelliyor. İki boyutlu bu fotoğraf üzerinde yapılan modellemeye göre üçgenin köşeleri $A(-3,6)$, $B(1,-10)$, $C(8,1)$ noktaları ve çelik çubuğun uç noktaları ise $D(x-3,-1)$ ve $E(11,y+3)$ tür.



Heykelin dengede kalabilmesi için çubuğun orta noktasının, üçgen levhanın ağırlık merkezi G ile çakışması gerekmektedir.

Heykel dengede durduğuna göre x ve y değerlerini bulunuz. (6 puan)

6. Aşağıda dik koordinat sisteminde modellenmiş bir kırsal yerleşim yerinin görseli verilmiştir. Harita üzerinde bu bölgeden geçen ana doğal gaz boru hattı, $y = 3x + 2$ denklemi ile modellenen doğru üzerinde. Bu bölgede inşa edilen bir çiftlik evi ise $P(5, 7)$ noktasıyla temsil edilmektedir.



Çiftlik evine doğal gaz ulaştırmak amacıyla ana hattan eve doğru doğrusal bir bağlantı borusu döşenecektir.

Buna göre;

- a) Maliyeti en az olacak şekilde döşenmek istenen boru hattının üzerinde bulunduğu doğrunun denklemini yazınız. (5 Puan)

- b) Döşenecek borunun ana hat üzerinde bağlanacağı noktayı belirleyiniz. (5 Puan)

7. Bir belediye, karbon ayak izini azaltmak amacıyla konutlarda enerji verimliliği taraması yapmaktadır. Konutların yıllık enerji tüketim değerlerine göre bir "Enerji Verimlilik Puanı" belirlenmiştir. Puanı 85 ve üzeri olan konutlar "A Sınıfı (Yüksek Verimli)", 60-84 arası olanlar "B Sınıfı (Orta Verimli)", 60'ın altında olanlar ise "C Sınıfı (Düşük Verimli)" olarak sınıflandırılmaktadır. Toplam 2000 konutun bulunduğu bir bölgede; konutların %60'ı apartman dairesi, geri kalanı ise müstakil evdir. Yapılan araştırma sonuçlarına göre
- Apartman dairelerinin %15'i A Sınıfı, %70'i B Sınıfı verimliliğe sahiptir.
 - Müstakil evlerin %10'u C Sınıfı, %50'si B Sınıfı verimliliğe sahiptir.

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Aşağıdaki tabloda istenen değerleri hesaplayarak boş bırakılan yerleri doldurunuz. (8 Puan)

Konut Tipi \ Verimlilik	A Sınıfı - Yüksek Verimli (Puanı 85 ve üzeri)	B Sınıfı - Orta Verimli (Puanı 60-84 arası)	C Sınıfı - Düşük Verimli (Puanı 60'ın altında)
Apartman Dairesi			
Müstakil Ev			

b) Bölgeden rastgele seçilen bir konutun B Sınıfı (Orta Verimli) olduğu bilindiğine göre bu konutun bir müstakil ev olma olasılığını bulunuz. (3 Puan)

c) Bölgeden rastgele seçilen bir konutun apartman dairesi olduğu bilindiğine göre bu konutun A Sınıfı (Yüksek Verimli) olma olasılığını bulunuz. (3 puan)

SORU	TEMA	KONU (İÇERİK ÇERÇEVESİ)	ÖĞRENME ÇIKTISI	MATEMATİKSEL ALAN BECERİLERİ
1	NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER	Gerçek Sayılarda Tanımlı Karesel Fonksiyon, Karekök Fonksiyonu ve Rasyonel Fonksiyonlar, Bu Fonksiyonların Nitel Özellikleri, Tersleri ve Bu Fonksiyonlarla İfade Edilebilen Denklem ve Eşitsizlikler	10.2.5. Doğrusal, karesel, karekök ve rasyonel referans fonksiyonlar ile bu fonksiyonlardan türetilen fonksiyonların ters fonksiyonlarına dair çıkarım yapabilme	MAB1. Matematiksel Muhakeme MAB3. Matematiksel Temsil (MAB3.2. Matematiksel Temsilleri Değerlendirme)
2			10.2.6. Doğrusal, karesel, karekök, rasyonel referans fonksiyonlar ve bunlardan türetilen fonksiyonlarla ifade edilebilen denklem ve eşitsizlikler içeren problemleri çözebilme	MAB2. Matematiksel Problem Çözme
3	SAYMA, ALGORİTMA VE BİLİŞİM	Sayma Stratejileri, Cebirsel ve Fonksiyonel İşlemlerin Algoritmik Yapısı	10.3.2. Cebirsel ve fonksiyonel işlemleri algoritmik bir dille yapılandırabilme	MAB2. Matematiksel Problem Çözme
4	ANALİTİK İNCELEME	Dik Koordinat Sisteminde Nokta ve Doğrunun Analitik İncelenmesi, İki Nokta Arasındaki Uzaklık, Bir Doğru Parçasını Belli Bir Oranda Bölme	10.5.1. Dik koordinat sisteminde iki nokta arasındaki uzaklık ve bir doğru parçasını belli oranda bölen noktanın koordinatlarıyla ilgili çıkarım yapabilme	MAB3. Matematiksel Temsil (MAB3.1. Matematiksel Temsillerden Yararlanma)
5			10.5.2. Dik koordinat sistemini doğrunun özelliklerini incelemek ve doğru ile ilgili problemleri çözebilmek için uygun bir temsil aracı olarak kullanabilme	
6				
7	VERİDEN OLASILIĞA	Koşullu Olasılık, Bağımlı ve Bağımsız Olaylar, Bayes Teoremi	10.7.1. Koşullu olasılık ile çıkarım yapabilme	MAB1. Matematiksel Muhakeme MAB2. Matematiksel Problem Çözme

PUANLAMA TABLOSU

1		2			3	4	5	6		7			TOPLAM
a	b	a	b	c			a	b	a	b	c		
8	15	5	6	8	22	6	6	5	5	8	3	3	100

ÇÖZÜMLER

1. a) $f(x) = \frac{x}{2} + 500$, $f(x)$: başlangıç bakiyesi (1 puan)

$f(600) = 800$ ve $f(1400) = 1200$ olduğundan görüntü kümesi $[800, 1200]$ dür. (2 puan)

$$f(x) = y = \frac{x}{2} + 500 \Rightarrow y - 500 = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2y - 1000 \Rightarrow y = 2x - 1000 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 1000 \quad (3 \text{ puan})$$

f^{-1} fonksiyonunun tanım kümesi: $[800, 1200]$, görüntü kümesi ise $[600, 1400]$ dür

(1 puan)

(1 puan)

b)

$$f(x) = y = 5 - \frac{2}{x+4} \Rightarrow \frac{2}{x+4} = 5 - y \Rightarrow x + 4 = \frac{2}{5-y} \Rightarrow x = \frac{2}{5-y} - 4 \Rightarrow y = \frac{2}{5-x} - 4 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2}{5-x} - 4 \quad (3 \text{ puan})$$

f fonksiyonunda rasyonel ifadenin paydasını sıfır yapan x değeri; $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ olduğundan fonksiyonun tanım kümesinden çıkarılması gereken a değeri -4 olur. (1 puan)

f^{-1} fonksiyonunda rasyonel ifadenin paydasını sıfır yapan x değeri; $5 - x = 0 \Rightarrow x = 5$ olduğundan f fonksiyonunun değer kümesinden çıkarılması gereken b değeri 5 olur. (1 puan)

$$g(x) = y = (x+4)^2 - 3 \Rightarrow y + 3 = (x+4)^2 \Rightarrow \sqrt{y+3} = x+4 \Rightarrow x = \sqrt{y+3} - 4 \Rightarrow y = \sqrt{x+3} - 4 \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x+3} - 4 \quad (3 \text{ puan})$$

g fonksiyonunun $[a, \infty)$ aralığında tersinin tanımlı olabilmesi için a değeri tepe noktasının apsisine eşit veya ondan büyük olmalıdır. Tepe noktasının apsisi $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ olduğundan en geniş aralık için $a = -4$ alınır. (1 puan)

g^{-1} fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için kök içindeki ifadenin sıfıra eşit ve büyük olması gerekir; $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ olduğundan $b = -3$ 'tür. (1 puan)

$$h(x) = y = \sqrt{x-2} + 7 \Rightarrow y - 7 = \sqrt{x-2} \Rightarrow (y-7)^2 = x-2 \Rightarrow (y-7)^2 + 2 = x \Rightarrow y = (x-7)^2 + 2 \Rightarrow h^{-1}(x) = (x-7)^2 + 2 \quad (3 \text{ puan})$$

h fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için kök içindeki ifadenin sıfıra eşit ve büyük olması gerekir; $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ olduğundan $a = 2$ 'dir. (1 puan)

h^{-1} fonksiyonunun $[b, \infty)$ aralığında tanımlı olabilmesi için b değeri tepe noktasının apsisine eşit veya ondan büyük olmalıdır. Tepe noktasının apsisi $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$ olduğundan en geniş aralık için $b = 7$ alınır. (1 puan)

Tanım ve Görüntü Kümesi	Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	a ve b Değeri
$f : \mathbb{R} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R} - \{b\}$	$f(x) = 5 - \frac{2}{x+4}$	$f^{-1}(x) = \frac{2}{5-x} - 4$	$a = -4$ $b = 5$
$g : [a, \infty) \rightarrow [b, \infty)$	$g(x) = (x+4)^2 - 3$	$g^{-1}(x) = \sqrt{x+3} - 4$	$a = -4$ $b = -3$
$h : [a, \infty) \rightarrow [b, \infty)$	$h(x) = \sqrt{x-2} + 7$	$h^{-1}(x) = (x-7)^2 + 2$	$a = 2$ $b = 7$

2. a) M panelinin modellendiği $m(x) = -2x^2 + 28x - 16$ fonksiyonunda $a = -2 < 0$ olduğundan maksimum noktasının

$$\text{apsisi } r = -\frac{b}{a} \Rightarrow r = -\frac{28}{2 \cdot (-2)} \Rightarrow r = 7 \text{ bulunur. (5 puan)}$$

Model-M panelinden elde edilen günlük enerji üretiminin maksimum olması için bu panel günde 7 saat çalıştırılmalıdır.

- b) M ve K panellerinin modellendiği fonksiyonların eşit olduğu x değerlerini bulabilmek için $m(x) = k(x)$ denklemi çözülür.

$$8x + 2 = -2x^2 + 28x - 16 \quad (2 \text{ puan})$$

$$2x^2 - 20x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 5)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x - 5 + 4)(x - 5 - 4) = 0 \quad (2 \text{ puan})$$

$$(x - 1) \cdot (x - 9) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 9 \quad (2 \text{ puan})$$

paneller 1 ve 9. saatte aynı miktarda enerji üretmişlerdir.

- c) Model-K panelinin, Model-M panelinden daha fazla enerji ürettiği x değerlerini bulabilmek için $k(x) > m(x)$ eşitsizliği çözülmelidir.

$$8x + 2 > -2x^2 + 28x - 16 \Rightarrow 2x^2 - 20x + 18 > 0 \quad (2 \text{ puan})$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 9 > 0 \quad (1 \text{ puan})$$

$$\Rightarrow (x - 5)^2 - 16 > 0$$

$$\Rightarrow (x - 5 + 4)(x - 5 - 4) > 0 \Rightarrow (x - 1) \cdot (x - 9) > 0$$

$$(x - 1) \cdot (x - 9) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 9 \quad (1 \text{ puan})$$

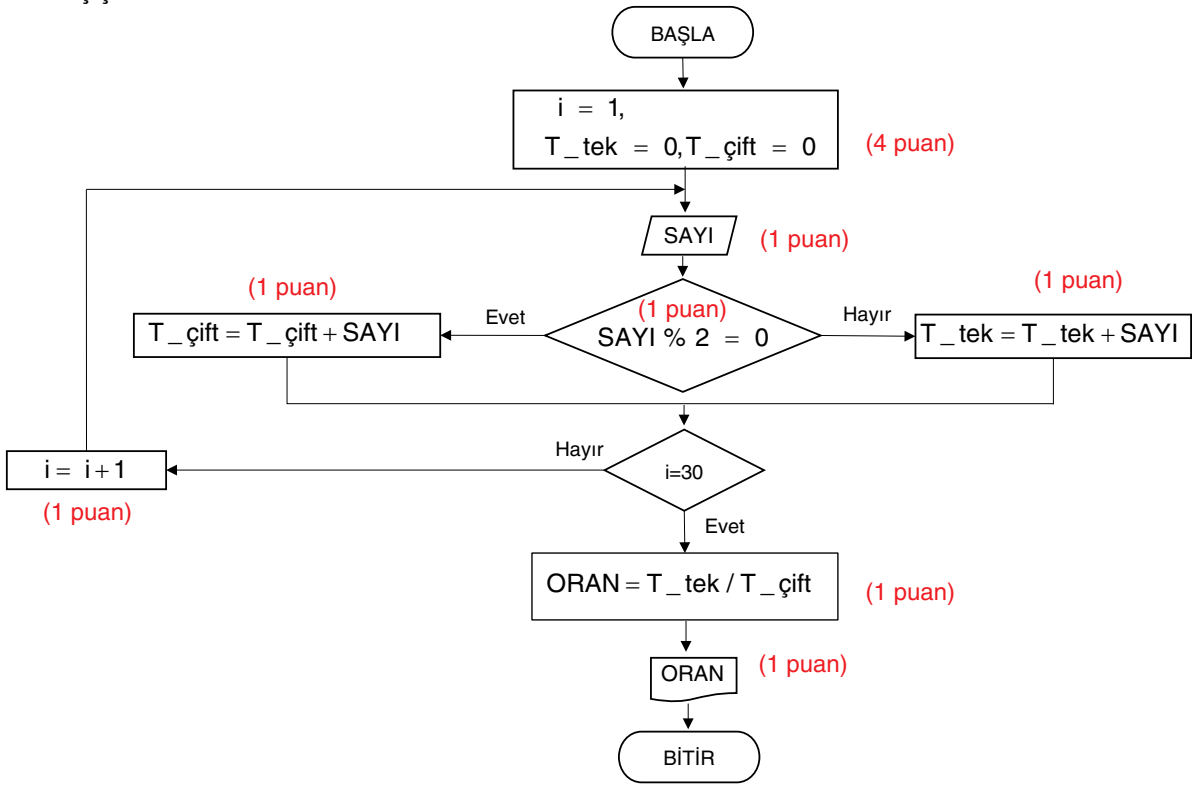
x	$-\infty$	1	9	∞	(2 puan)
$x^2 - 10x + 9$	+	⊖	⊖	+	

İşaret tablosunu incelediğimizde pozitif değerlerin alındığı aralıklar $0 \leq x < 1$ ve $x > 9$ dur.

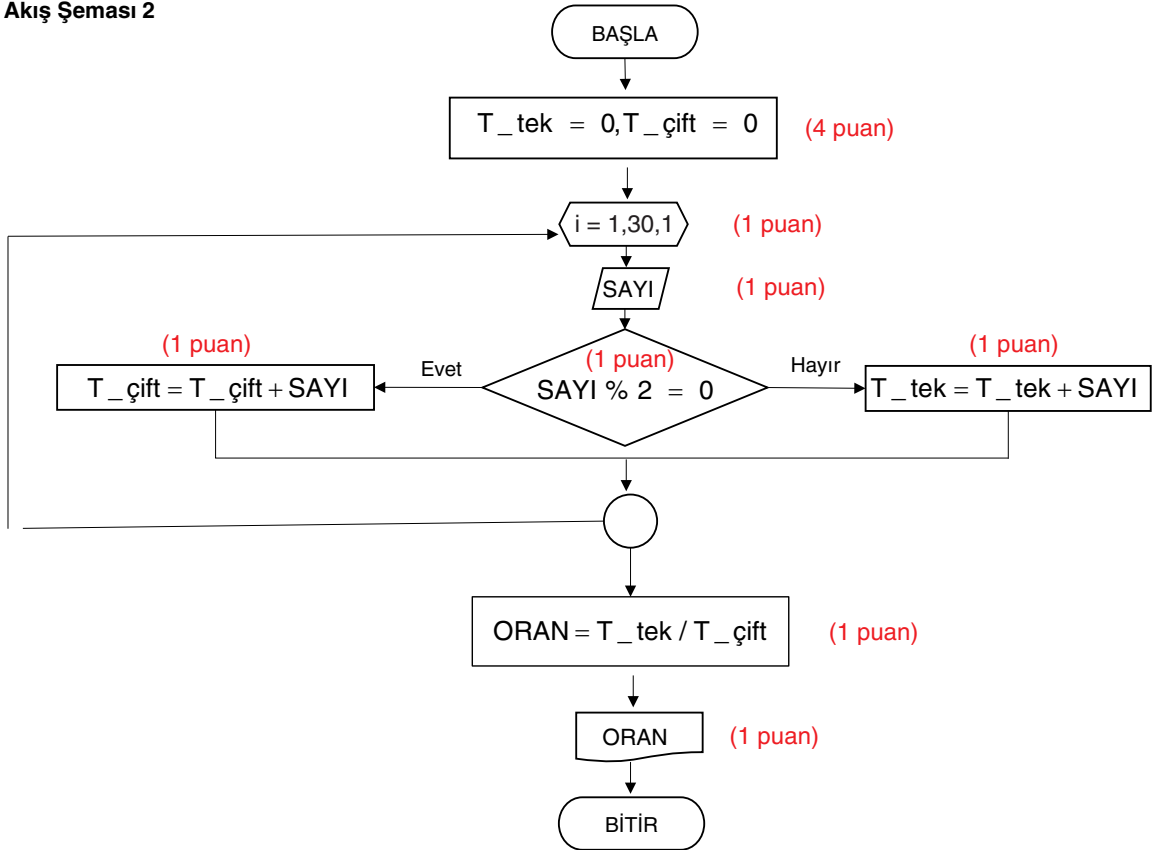
Bizden panellerin ürettiği enerji miktarının eşitlendiği süreden sonrası istendiğinden $x > 9$ olmalıdır.

Model-K panelinin, Model-M panelinden daha fazla enerji ürettiği saatin en küçük tam sayı değeri 10'dur. (2 puan)

3. Akış Şeması 1



Akış Şeması 2



4. İki kuryenin aynı anda ve eşit hızda yola çıkıp hedeflerine aynı anda ulaştıkları belirtilmiştir. Bu durum (Yol = Hız × Zaman) kuryelerin aldıkları yolların birbirine eşit olduğunu gösterir. Yani ana depo (C noktası), A ve B noktalarına eşit uzaklıktadır. A(2, 5), B(10, -1) ve C(x, -2) noktaları için $|AC| = |BC|$ olduğundan iki nokta arasındaki uzaklık formülünden

$$\sqrt{(x-2)^2 + 7^2} = \sqrt{(x-10)^2 + 1^2} \text{ eşitliğine ulaşırız. (1 puan)}$$

$$\text{Eşitliğin her iki tarafının karesini alındığında } (x-2)^2 + 7^2 = (x-10)^2 + 1^2 \text{ elde edilir. (1 puan)}$$

$$\text{Denklemler düzenlendiğinde } x^2 - 4x + 53 = x^2 - 20x + 101 \text{ bulunur. (2 puan)}$$

$$\text{Buradan gerekli sadeleştirmeler yapıldığında } 16x = 48 \text{ (1 puan)} \Rightarrow x = 3 \text{ bulunur. (1 puan)}$$

5. ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatları $G\left(\frac{1+8-3}{3}, \frac{6+1-10}{3}\right) = G(2, -1)$ olarak bulunur. (2 puan)

Çubuğun ortası olan G noktasının koordinatları orta nokta formülü ile bulunur.

$$\frac{x-3+11}{2} = 2 \text{ (1 puan)} \quad \frac{y+3-1}{2} = -1 \text{ (1 puan)}$$

$$x + 8 = 4 \quad y + 2 = -2$$

$$x = -4 \text{ (1 puan)} \quad y = -4 \text{ (1 puan)}$$

6. a) Maliyetin en az olması için çiftlik evinin doğal gaz boru hattına en kısa mesafede yani dik doğrultuda bağlanması gerekir. Bu nedenle hatta dik olan doğrunun denklemi bulunmalıdır.

$$y = 3x + 2 \text{ doğrusunun eğimi } 3 \text{ olduğundan bu doğruya dik olan doğrunun eğimi } -\frac{1}{3} \text{ tür. (2 puan)}$$

Eğimi $m = -\frac{1}{3}$ olan ve P(5,7) noktasından geçen doğrunun denklemini yazalım.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 7 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 5) \Rightarrow 3y - 21 = -x + 5 \text{ (2 puan)}$$

$$\Rightarrow x + 3y = 26 \text{ (1 puan)}$$

En az maliyetle eve döşenmek istenen boru hattının üzerinde bulunduğu doğru denklemi $x + 3y = 26$ dır.

- b) Ana doğal gaz boru hattının modellendiği d doğrusu ile eve döşenecek boru hattının üzerinde bulunduğu doğrunun kesişim noktası istenmektedir. Bunun için iki doğrunun ortak çözümü bulunur.

$$\begin{array}{r} x + 3y = 26 \quad \cdot 3 \\ y - 3x = 2 \end{array} \text{ (2 puan)}$$

$$\hline 3x + 9y = 78$$

$$y - 3x = 2$$

$$\hline 10y = 80 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow 8 - 3x = 2$$

$$\Rightarrow 3x = 6$$

$$\Rightarrow x = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 8 \\ x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow (2, 8) \text{ (1 puan)}$$

(2 puan)

7. a) $2000 \cdot \frac{60}{100} = 1200$ Apartman Dairesi, $2000 - 1200 = 800$ Müstakil Ev (2 puan)
- (1 puan) $1200 \cdot \frac{15}{100} = 180$ A sınıfı $800 \cdot \frac{50}{100} = 400$ B sınıfı (1 puan)
- (1 puan) $1200 \cdot \frac{70}{100} = 840$ B sınıfı $800 \cdot \frac{10}{100} = 80$ C sınıfı (1 puan)
- (1 puan) $1200 - (180 + 840) = 180$ C sınıfı $800 - (400 + 80) = 320$ A sınıfı (1 puan)

Konut Tipi \ Verimlilik	A Sınıfı - Yüksek Verimli (Puanı 85 ve üzeri)	B Sınıfı - Orta Verimli (Puanı 60-84 arası)	C Sınıfı - Düşük Verimli (Puanı 60'ın altında)
Apartman Dairesi	180	840	180
Müstakil Ev	320	400	80

- b) Bölgede bulunan müstakil evlerin oluşturduğu küme M ve B sınıfı konutların oluşturduğu küme B olmak üzere B sınıfı konutların içinden seçilen bir konutun müstakil ev olma olasılığı

$$P(M/B) = \frac{s(M \cap B)}{s(B)} = \frac{400}{1240} = \frac{10}{31} \text{ olarak bulunur. (3 puan)}$$

- c) Bölgede bulunan apartman dairelerinin oluşturduğu küme A ve A sınıfı konutların oluşturduğu küme D olmak üzere apartman dairelerinin içinden seçilen bir konutun A sınıfı olma olasılığı

$$P(D/A) = \frac{s(D \cap A)}{s(A)} = \frac{180}{1200} = \frac{3}{20} \text{ olarak bulunur. (3 puan)}$$