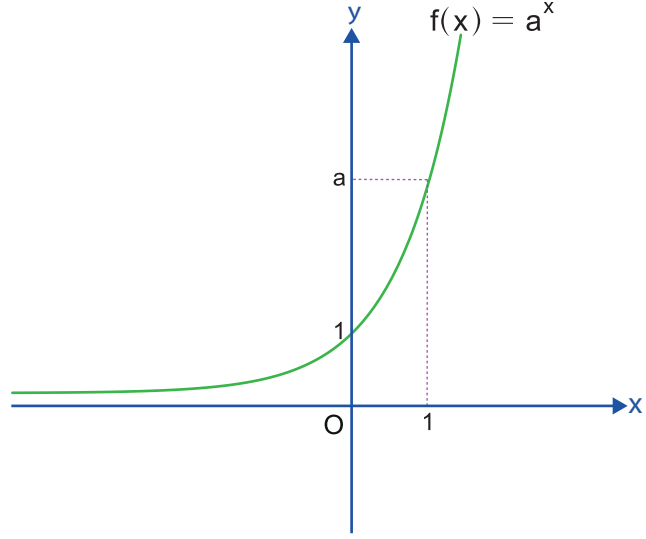


ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonuna, **tabanı “a” olan üstel fonksiyon** denir.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $a > 1$ için $f(x) = a^x$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir.



$2^x = 8$ eşitliğinde x in 3 olduğu görülebiliyor. Fakat $2^x = 10$ eşitliğini sağlayan herhangi bir x tam sayı değeri yoktur. Bu x gerçekte sayı değerini bulabilmek için farklı bir fonksiyona ihtiyaç duyulmuştur. Bu fonksiyon; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunun tersi olan logaritma fonksiyonudur.

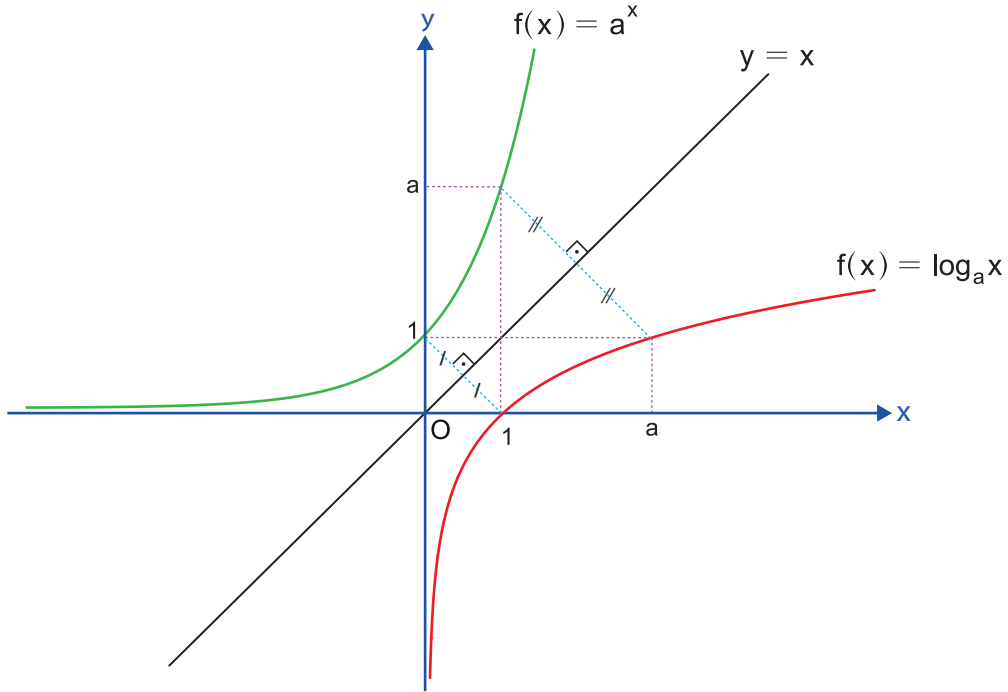
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ olacak şekilde $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunun tersi olan fonksiyona, **a tabanına göre logaritma fonksiyonu** denir. Logaritma fonksiyonu, $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ şeklinde gösterilir.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ için $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$ olur.

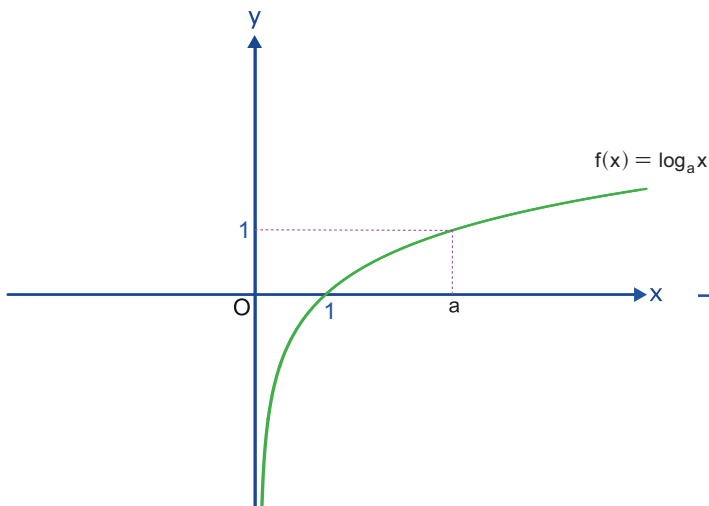
$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = \log_a x$ fonksiyonunda

- ✓ x sayısı pozitif gerçekte sayıdır.
- ✓ a sayısı 1 den farklı pozitif gerçekte sayıdır.
- ✓ y sayısı bir gerçekte sayıdır.

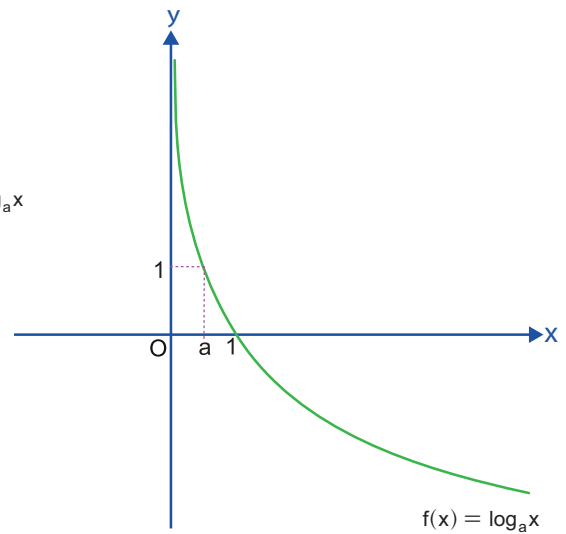
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \log_a x$ fonksiyonu, $f(x) = a^x$ fonksiyonunun ters fonksiyonudur. Birbirinin tersi olan iki fonksiyonun grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğundan önce $y = x$ doğrusu çizilir. Daha sonra $f(x) = a^x$ fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği alınarak $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği oluşturulur.



$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere
 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$
 logaritma fonksiyonu, $a > 1$ için artan
 olup grafiği aşağıdaki gibidir.



$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere
 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$
 logaritma fonksiyonu $0 < a < 1$ için
 azalan olup grafiği aşağıdaki gibidir.



Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna **onluk logaritma fonksiyonu** veya **bayağı logaritma fonksiyonu** denir.

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{10} x$ veya $f(x) = \log x$ biçiminde gösterilir.

Tabanı e irrasyonel sayısı olan logaritma fonksiyonuna **doğal logaritma fonksiyonu** denir. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_e x$ veya $f(x) = \ln x$ şeklinde gösterilir. Bu durumda $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$ olur.

Özellik 1: $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere

✓ $\log_a a = 1$

✓ $\log_a 1 = 0$ olur.

Özellik 2: $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

✓ $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

✓ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ olur.

Özellik 3: $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $x \in \mathbb{R}^+$, $m, n \in \mathbb{R}$ ve $n \neq 0$ olmak üzere

✓ $\log_a x^m = m \log_a x$

✓ $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

✓ $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$ olur.

Özellik 4: $a, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ olur.

Bu özelliğe **taban değiştirme özelliği** denir. Taban değiştirme özelliği yardımıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

✓ $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

✓ $a, b, c, d, \dots, m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \dots \cdot \log_m n = \log_a n$

✓ $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

Özellik 5: ✓ $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $a^{\log_a b} = b$ olur.

✓ $b \in \mathbb{R} - \{1\}$ ve $a, c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ olur.

Bilinmeyenlerin üs olarak bulunduğu denklemler üstel denklemlerdir. Bu tür denklemlerin çözüm kümelerinin bulunmasında üstel ve logaritmik fonksiyonların özellikleri kullanılır.

Bilinmeyen içeren logaritmali eşitliklere **logaritmik denklemler** denir. Bu tür denklemlerin çözüm kümelerinin bulunmasında logaritma fonksiyonunun özelliklerinden yararlanılır. Logaritmik denklemlerde logaritması alınan ifadelerin pozitif olması şartının yanı sıra taban x e bağlı bir fonksiyonsa tabanın da pozitif ve 1 den farklı olma şartı aranır. Bulunan x değerlerinin bu şartları sağlamasına göre çözüm kümesi oluşturulur.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\checkmark \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

$$\checkmark \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$\checkmark \log_{f(x)} g(x) = b \Leftrightarrow g(x) = (f(x))^b$$

Üstel eşitsizliklerde $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ için

$$\checkmark a > 1 \text{ ise } f(x) \geq g(x) \text{ olur.}$$

$$\checkmark 0 < a < 1 \text{ ise } f(x) \leq g(x) \text{ olur. } (0 < a < 1 \text{ ise eşitsizlik yön değiştirir.})$$

Logaritmali eşitsizliklerde $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ için

$$\checkmark a > 1 \text{ ise } f(x) \leq g(x) \text{ olur.}$$

($a > 1$ ise logaritma fonksiyonu artandır ve bu durumda eşitsizlik yön değiştirmez.)

$$\checkmark 0 < a < 1 \text{ ise } f(x) \geq g(x) \text{ olur.}$$

($0 < a < 1$ ise logaritma fonksiyonu azalandır ve bu durumda eşitsizlik yön değiştirir.)

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmalıdır.